FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Teoria dei grafi

TEOREMA DI RAMSEY

Maria Concetta Campailla
matricola 524036

Anno Accademico 2020-2021
Dipartimento di Matematica

Indice

Introduzione

1

La **teoria di Ramsey** si occupa di problemi della forma: qual è il minor numero di elementi necessario affinchè una certa proprietà sia vera?
Ad esempio assumiamo di aver sistemato n piccioni in m piccionaie. Quanto deve essere grande n affinchè almeno una piccionaia contenga due piccioni? Ovviamente, ciò accade solo se $n > m$.
La teoria di Ramsey si occupa di generalizzare questo principio.
In particolare, il teorema di Ramsey afferma che per ogni colorazione dei lati di un grafo completo con abbastanza vertici è possibile trovare un sottografo completo monocromatico.
Se il grafo è colorato con i soli due colori rosso e blu, il teorema afferma che comunque scelti due interi positivi r e s esiste un intero $R_{r,s}$ tale che in un grafo completo con almeno $R_{r,s}$ vertici è sempre possibile, per qualsiasi colorazione, trovare un sottografo completo totalmente blu con r vertici, o un sottografo completo totalmente rosso con s vertici.
Il numero $R_{r,s}$ viene detto **numero di Ramsey** se è il più piccolo intero per cui vale questa proprietà.
Il teorema di Ramsey è valido anche per più di due colori: scelto un numero c di colori, per qualsiasi scelta di interi positivi $n_1, \dots, n_c$, esiste un numero $R_{n_1,\dots,n_c}$ tale che in ogni grafo con almeno $R_{n_1,\dots,n_c}$ vertici è sempre possibile trovare, per un certo $i \in \{1, \dots, c\}$, un sottografo completo con n_i vertici colorato con il colore i.

Il caso finito

2

2.1 Il principio dei cassetti

Il **principio dei cassetti**, o *principio di Dirichlet*, afferma quanto segue:

$$se\ r+1\ oggetti\ vengono\ distribuiti\ in\ r\ cassetti,$$

$$esiste\ almeno\ un\ cassetto\ che\ contiene\ piu'\ di\ un\ oggetto.$$

Si tratta di un principio di esistenza, esso afferma infatti che esiste un cassetto con la proprietà richiesta, ma non fornisce un metodo per trovarlo.

Esempio 2.1. Dato un intero m, i possibili resti della divisione di un intero per m sono $0, 1, \ldots, m-1$ e sono quindi m in numero. Se prendiamo $m+1$ interi e dividiamo ciascuno di essi per m, ve ne sono allora almeno due che danno lo stesso resto. Dunque, se suddividiamo gli interi in m classi (cassetti) mettendo in una stessa classe due interi se divisi per m danno lo stesso resto, allora di $m+1$ interi(oggetti) almeno due appartengono alla stessa classe.

Se invece di *cassetti* si parla di *colori*, il principio dei cassetti diventa

$$colorando\ in\ qualunque\ modo\ r+1\ oggetti\ con\ r\ colori,$$

$$si\ trovano\ sempre\ due\ oggetti\ con\ lo\ stesso\ colore.$$

Più in generale, se $n \geq r(l-1)+1$, comunque si colorino n oggetti con r colori esistono l oggetti che hanno lo stesso colore; infatti, se ci fossero al più $l-1$ oggetti di ogni colore (al più $l-1$ oggetti in ciascun cassetto), ci sarebbero in tutto al più $r(l-1)$ oggetti, contro l'ipotesi. Tale numero $1+r(l-1)$ è minimo: se il numero degli oggetti è inferiore a questo numero allora essi si possono colorare in maniera tale che nessun sottoinsieme di l oggetti abbia lo stesso colore.

2.2 Il Teorema di Ramsey

Ci poniamo allora la seguente domanda: *dato un intero r, quanto deve essere grande n tale che, colorandone gli elementi con r colori, ci siano almeno due* *elementi con lo stesso colore?* Per quanto detto, n deve essere almeno $r+1$. Consideriamo adesso coppie di elementi anzichè considerare elementi, e invece di richiedere che ci siano almeno 2 elementi dello stesso colore(cioè che esista un sottoinsieme di cardinalità 2 con tutti gli elementi dello stesso colore), richiediamo che esista un sottoinsieme di cardinalità p con tutte le coppie di elementi dello stesso colore. Questo caso si può interpretare in termini di grafi se si considera come insieme di cardinalità n l'insieme dei vertici del grafo completo K_n, come coppie di vertici gli archi, e come sottoinsieme di cardinalità p un sottografo completo K_p. La domanda precedente diventa allora: *dati gli interi r, p , quanto deve essere grande n affinchè, comunque coloriamo gli archi del grafo completo K_n con r colori, esso contenga un grafo K_p con tutti gli archi dello stesso colore(ossia K_p monocromatico)?* Più in generale, se invece di coppie di elementi consideriamo un sottoinsieme di cardinalità $k \geq 2$ quanto deve essere grande n affinchè, comunque coloriamo i sottoinsiemi di cardinalità k di un insieme con n elementi con r colori, si trovi in questo insieme un sottoinsieme di cardinalità p con tutti i sottoinsiemi di cardinalità k dello stesso colore?

Si pone un problema: questo n esiste sempre? Per grandi valori di k e p potrebbero esistere insiemi di cardinalità n arbitrariamente grande nessuno dei quali soddisfa la proprietà richiesta. Il teorema di Ramsey afferma l'esistenza di n finito in tutti i casi; dati r, k, p esiste quindi un numero finito tale che ogni insieme con almeno questo numero di elementi ha la proprietà richiesta. Questo minimo, che si denota con $R(r, k, p)$ si dice *numero di Ramsey*. In altri termini, il Teorema di Ramsey garantisce l'esistenza, in grafi completi con un numero sufficientemente grande di vertici, di un sottografo monocromatico isomorfo a K_n.

Teorema 2.2. *Dati r, k, p interi positivi, esiste un intero positivo n con la proprietà che se i k-sottoinsiemi(sottoinsiemi di cardinalità k) di un insieme con n elementi sono colorati in qualunque modo con r colori si trova sempre un p-sottoinsieme monocromatico, cioè tale che tutti i suoi k-sottoinsiemi hanno lo stesso colore.*

Esempio 2.3. Siano $r = k = 2$, $p = 3$. Esiste n tale che colorando comunque gli archi di K_n con due colori si trovi sempre un K_3 monocromatico? Dovrà essere $n > 5$. Infatti esiste una colorazione con due colori degli archi di K_5 senza che ci siano triangoli monocromatici. Siano 0, 1,2,3,4 i vertici; coloriamo l'arco (i, j) di un colore se $i - j \equiv \pm 1 (mod\ 5)$, e dell'altro se $i - j \equiv \pm 2 (mod\ 5)$(Figura 2.1).

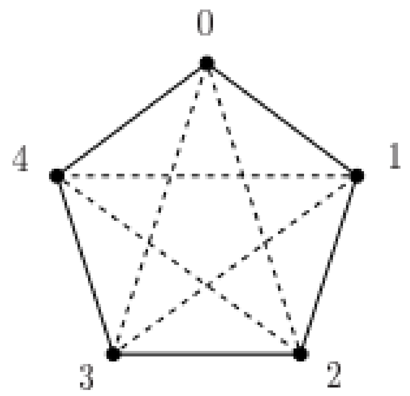

Fig. 2.1: Se $i - j = \pm 1 (mod 5)$ tracciamo una linea piena, altrimenti tracciamo una linea tratteggiata.

Proviamo con 6 vertici(Figura2.2). Fissiamo un vertice v di K_6; da questo partono 5 archi e di questi(per il principio dei cassetti con $r = 2$ e $l = 3$) almeno tre sono di uno stesso colore, assumiamo sia rosso(segmenti pieni in figura). Se due dei vertici di arrivo sono congiunti da un arco rosso otteniamo, insieme a v, un triangolo rosso; se tutti e tre sono congiunti da archi blu otteniamo un triangolo blu. Il minimo è quindi $R(2, 2, 3) = 6$. Concludiamo dunque che in un qualunque grafo con almeno sei vertici ci sono o tre vertici a due a due adiacenti, oppure tre vertici a due a due non adiacenti. Se il grafo ha cinque vertici non è detto che ciò accada.

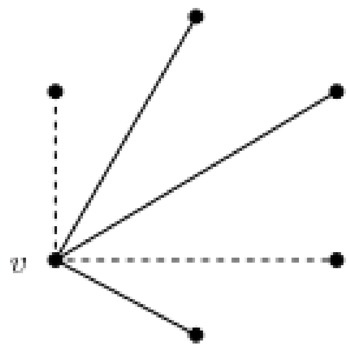

Fig. 2.2: Assumiamo che i segmenti pieni siano quelli colorati di rosso.

Nell'esempio precedente i due sottoinsiemi sono dei K_p con $p = 3$. Vediamo una formulazione più generale del Teorema 2.2, considerando più interi p e, invece di coppie, k- sottoinsiemi.

Teorema 2.4. *Dati r, k e $p_1, \ldots, p_r$ esiste un intero positivo n tale che se i k-sottoinsiemi di un insieme con n elementi sono colorati in qualunque modo con r colori, allora si trova sempre un p_i-sottoinsieme monocromatico per qualche i.*

In questo caso, denotiamo il numero di Ramsey con $R(p_1, p_2, \ldots, p_r; k)$. Dimostriamo ora il teorema nel caso nel caso dei grafi, $k = 2$. Consideriamo innanzitutto $r = 2$ e scriviamo $R(p, q)$ anzichè $R(p_1, p_2; 2)$. Osserviamo che $R(s, 2) = R(2, s) = s$, infatti se coloriamo i lati di K_s di blu e di rosso, se non ci sono lati rossi, c'è almeno un lato blu.

Teorema 2.5. *Siano p, q interi, $p, q \geq 2$. Allora il numero di Ramsey $R(p, q)$ esiste finito e se $p, q \geq 3$ si ha inoltre:*

$$R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1) \qquad (1)$$

e

$$R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}. \qquad (2)$$

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione su $p + q$.

Se $p = 2$ o $q = 2$, $R(2, q) = q$, $R(p, 2) = p$ e sono valori finiti.
Assumiamo allora $p, q > 2$ e che la tesi sia vera per valori minori di $p + q$. In particolare, supponiamo che la tesi sia vera per $(p-1)+q$ e per $p+(q-1)$ ossia $R(p-1, q)$ e $R(p, q-1)$ esistano finiti e mostriamo che $R(p, q)$ esiste finito.
Sia $n = R(p-1, q) + R(p, q-1)$ e consideriamo una colorazione dei lati di K_n in blu e in rosso. Poichè $m = R(p, q)$ è il minimo intero per cui K_m ha questa proprietà, se dimostriamo che in questa colorazione di K_n si ha o un K_p blu o un K_q rosso, si ha che $R(p, q) \leq n$.
Sia v un vertice di K_n; allora v avrà grado $n-1 = R(p-1, q)+R(p, q-1)-1$. Per il principio dei cassetti, ci sono almeno $n_1 = R(p-1, q)$ lati blu oppure almeno $n_2 = R(p, q-1)$ lati rossi incidenti a v, altrimenti ci sarebbero n_1+n_2-2 lati in tutto. Nel primo caso, consideriamo K_{n_1} su v e sugli estremi dei lati blu incidenti a v. Se K_{n_1} contiene un K_q rosso abbiamo concluso; altrimenti esso contiene un K_{p-1} blu e questo insieme a v costituisce un K_p blu. Per simmetria si ottiene l'altro caso.
Per quanto riguarda la (2), se p o q sono uguali a 2, allora $R(p, q) = \binom{p+q-2}{p-1}$. Per ipotesi induttiva, la disuguaglianza (2) vale per con $q-1$ al posto di q, $p-1$ al posto di p. Dunque, dalla formula $\binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1} = \binom{m}{k}$ con $m = p+q-2$ e $k = p-1$, si ha:

$$R(p,q) \leq R(p,q-1)+R(p-1,q) \leq \binom{p+q-3}{p-1}+\binom{p+q-3}{p-2} = \binom{p+q-2}{p-1}.$$

□

Corollario 2.6. *Se* $n_1 = R(p-1,q)$ *e* $n_2 = R(p,q-1)$ *sono entrambi pari, allora nel teorema 2.5 (1) si ha una disuguaglianza:*

$$R(p,q) < R(p-1,q) + R(p,q-1).$$

Dimostrazione. Sia $n = n_1 + n_2 - 1$. Basta dimostrare che se n_1,n_2 sono entrambi pari, nel grafo K_n colorato di rosso e blu si ha un K_p blu oppure un K_q rosso. Infatti, poichè $R(p,q)$ è il minimo intero m tale che K_m ha questa proprietà, si ottiene $R(p,q) = m \leq n < n_1 + n_2 = R(p-1,q) + R(p,q-1)$.
Se un vertice di K_n è incidente ad almeno n_1 archi di colore blu, si ha il risultato come visto nella dimostrazione del teorema.
Assumiamo allora che ogni vertice sia incidente al massimo a $n_1 - 1$ lati blu; in modo analogo possiamo supporre che ogni vertice sia incidente al massimo a $n_2 - 1$ lati rossi. Ma allora ogni vertice è incidente a esattamente $n_1 - 1$ lati blu ed esattamente $n_2 - 1$ lati rossi (altrimenti ci sarebbe un vertice incidente a meno di $n_1 + n_2 - 2 = n - 1$ lati).
Consideriamo il grafo costituito dagli n vertici e dei lati blu: tale grafo ha un numero dispari di vertici ($n = n_1 + n_2 - 1$, n_1,n_2 pari) e in esso ogni vertice ha grado dispari. In particolare, la somma dei gradi dei vertici è dispari in quanto essa vale $n(n-1)$ ma questa somma in qualunque grafo è pari. Dunque l'ipotesi che ogni vertice sia incidente al massimo a $n_1 - 1$ lati blu e al massimo a $n_2 - 1$ lati rossi porta a un assurdo. Deduciamo allora che un vertice K_n è incidente ad almeno n_1 lati blu oppure ad almeno n_2 lati rossi e quindi la tesi. □

2.3 Osservazioni ed esempi

Esempio 2.7. Nell'esempio precedente vale l'uguaglianza:

$$R(3,3) = \binom{3+3-2}{3-1} = 6.$$

Tuttavia, per $R(3,4)$ ciò non è più vero. Dal teorema 2.5 (1):

$$R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) = 4 + 6 = 10.$$

Consideriamo il grafo K_9 e facciamo vedere che se non ci sono K_3 blu c'è un K_4 rosso. Sia v un vertice di K_9. E' necessario distinguere diversi casi.

- Assumiamo che da v partano 0,1 o 2 lati blu e quindi 8, 7 o 6 lati rossi. Dal momento che i vertici di arrivo dei lati rossi sono in numero maggiore o uguale a 6, si tratta di vertici di un grafo completo con un numero di vertici maggiore o uguale a 6, e quindi in questo grafo si ha un K_3 monocromatico. Se il grafo K_3 trovato è blu, abbiamo concluso. Se invece tale grafo è rosso, unendo K_3 a tre dei lati rossi uscenti da v si ottiene un K_4 rosso.

- Nel caso in cui da v partono 4 lati blu e quindi 4 rossi, se due vertici di arrivo dei lati blu sono congiunti da un lato blu, abbiamo un K_3 blu. Altrimenti, questi vertici sono tutti congiunti da un lato rosso e dunque si ha un K_4 rosso.

- Analizziamo infine il caso in cui non tutti i vertici possono avere esattamente 3 lati blu uscenti. In tal caso, cancellando da K_9 i lati rossi si ottiene un grafo con un numero dispari di vertici nel quale ogni vertice ha grado 3, quindi la somma dei vertici sarà 9·3=27 e ciò porta a una contraddizione perchè la somma dei gradi dei vertici di grado dispari di un grafo è pari.

Deduciamo dunque che $R(3,4) \leq 9$.
Consideriamo adesso K_8 e indichiamo i vertici con 0,1,2,...,7.
Coloriamo i lati in questo modo: se $i-j \equiv \pm 1, \pm 4 \pmod 8$ coloriamo di blu, se $i-j \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod 8$ coloriamo di rosso; ciò equivale a colorare i lati e le quattro diagonali di un ottagono di blu e gli altri lati di rosso. In questo modo, non ci sono né K_3 blu né K_4 rossi, dunque $R(3,4) > 8$, da cui $R(3,4) = 9$.

Esempio 2.8. Dal fatto che $R(3,4) = R(4,3) = 9$ dimostriamo che $R(4,4) \leq 18$(in realtà si può dimostrare che $R(4,4) = 18)$.
Sia v un vertice di K_{18}; da esso escono 17 lati di cui 9 di un determinato colore.

- Se i lati sono blu, nel grafo completo K_9 sui 9 vertici di arrivo dei lati blu esiste un K_3 blu o un K_4 rosso. Se esiste un K_4 rosso abbiamo concluso; se esiste un K_3 blu, i lati di K_3 uniti a quelli uscenti da v costituiscono un K_4 blu.

- Analizziamo il caso in cui i lati sono rossi. Se in K_9 c'è un K_3 rosso, tale grafo unito ai lati uscenti da v costituisce un K_4 rosso. Se non ci sono K_3 rossi, c'è un K_4 blu e dunque abbiamo concluso.

Osservazione 2.9. E' possibile dimostrare che il numero di Ramsey è finito pur non usando la (2) del teorema 2.5.
Sapendo che $R(5,2)=5$, dalla (1) del teorema 2.5 segue che $R(5,3)$ è finito; infatti vale la seguente disuguaglianza

$$R(5,3) \leq R(5,2)+R(4,3)=5+9=14.$$

Ma allora anche $R(5,4)$ e $R(5,5)$ sono finiti:

$$R(5,4) \leq R(5,3)+R(4,4) \leq 14+18=32$$

$$R(5,5) \leq R(5,4)+R(4,5) \leq 2 \cdot 32=64.$$

Dunque tutti i numeri di Ramsey $R(p,q)$ con $p,q \leq 5$ sono finiti.
In modo analogo, poichè $R(6,2)=6$, si dimostra che $R(p,q)$ con $p,q \leq 6$ è finito.
Più in generale, dalla finitezza di $R(p,q)$ con $p,q \leq k$ si può dimostrare per induzione la finitezza di $R(k+1,q)$.

Osservazione 2.10. E' possibile minorare $R(p,q)$ dimostrando che $R(p,q) > (p-1)(q-1)$ ossia che esiste una bicolorazione di $K_{(p-1)(q-1)}$ che non contiene né un K_p blu né un K_q rosso.
Innanzitutto disponiamo i vertici di $K_{(p-1)(q-1)}$ in una griglia con $p-1$ righe e $q-1$ colonne e uniamo tutte le coppie di vertici su una stessa riga con lati rossi e su righe diverse con lati blu. Così facendo troviamo $p-1$ grafi completi K_{q-1} colorati di rosso e non avendo altri lati rossi, non si hanno K_q rossi.
Consideriamo p vertici sulle $p-1$ righe; per il principio dei cassetti, almeno due si trovano sulla stessa riga e quindi sono uniti da un lato rosso. Concludiamo quindi che non possono far parte di un K_p blu.
Dal teorema 2.5 (2) segue allora che

$$(p-1)(q-1)+1 \leq R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}. \tag{3}$$

Non si sa molto del valore effettivo dei numeri di Ramsey.
Oltre a conoscere $R(3,3)=6$ e $R(3,4)=9$, oggi sono noti soltando $R(3,5)=14$, $R(3,6)=18$, $R(3,7)=23$, $R(3,9)=36$ e $R(4,4)$, $R(4,5)=25$.
Per altri valori di p e q, si possono delle stime più precise della (3); ad esempio, applicando la (3) a $R(4,6)$ si ottiene un valore compreso tra 16 e 56 ma si può dimostrare che il valore è compreso tra 35 e 41.

Se $p=q$ possiamo dare una migliore stima di $(p-1)^2+1$ data da (3); infatti è possibile dimostrare che $R(p,p) \geq 2^{(p-2)/2}$ con $p \geq 3$.
Dato n intero, se coloriamo i lati di K_n con due colori, si hanno $2^{\binom{n}{2}}$ colorazioni. Vediamo con quante di queste colorazioni otteniamo un K_p monocromatico.
Sia K_p fissato. Tra tutte le $2^{\binom{p}{2}}$ colorazioni di questo grafo solo due sono monocromatiche, quindi tra tutte le $2^{\binom{n}{2}}$ colorazioni di K_n ci sono $2^{\binom{n}{2}}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}}$ colorazioni per le quali K_p è monocromatico. Si hanno quindi al massimo $\binom{n}{p}2^{\binom{n}{2}}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}}$ colorazioni che danno luogo a un K_p monocromatico in quanto ci sono $\binom{n}{p}$ grafi K_p in K_n. Dunque, se vale la seguente

$$\binom{n}{p}2^{\binom{n}{2}}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}} < 2^{\binom{n}{2}}$$

allora esiste una colorazione priva di K_p monocromatici. Vale a dire, se esiste n tale che

$$\binom{n}{p}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}} < 1$$

allora il corrispondente grafo K_n ammette una colorazione senza K_p monocromatici.
Sia $n = \lfloor 2^{\frac{p-2}{2}} \rfloor$. Poichè $\binom{n}{p} < n^p$ e $1 - p(p-1)/2 < -p(p-2)/2$, si ottiene

$$\binom{n}{p}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}} < n^p 2^{1-\frac{p(p-2)}{2}} < \lfloor 2^{\frac{p-2}{2}} \rfloor^p 2^{\frac{-p(p-2)}{2}} \leq 2^{\frac{p^2-2p-p^2+2p}{2}} = 2^0 = 1.$$

Concludiamo quindi che $R(p,p) \geq 2^{\frac{p-2}{2}}$.

Osservazione 2.11. Il metodo usato per dimostrare che $R(p,p) \geq 2^{\frac{p-2}{2}}$ è detto **metodo probabilistico** in quanto ha una interpretazione probabilistica. Coloriamo i lati di K_n in questo modo: dato un lato, lanciamo una moneta e se esce testa coloriamo il lato di blu, se esce croce lo coloriamo di rosso; ripetiamo poi questo procedimento per ogni lato. Quindi un lato è rosso(o blu) con probabilità $\frac{1}{2}$ e le colorazioni dei lati sono indipendenti.
Consideriamo ora un grafo K_p: esso ha $\binom{p}{2}$ lati e quindi abbiamo $2^{\binom{p}{2}}$ colorazioni possibili. Dunque la probabilità che tutti i lati siano blu è $\frac{1}{2^{\binom{p}{2}}}$ e la stessa cosa vale per la probabilità che siano tutti rossi. La probabilità di avere una colorazione monocromatica è quindi $\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}}$.
In K_n ci sono $\binom{n}{p}$ grafi K_p e dunque la probabilità che in una colorazione di

K_n ci sia un K_p monocromatico è $P = \binom{n}{p}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}}$. Dire che in qualunque colorazione di K_n esiste un K_p monocromatico equivale a dire che la probabilità di trovare un K_p monocromatico in ogni colorazione di K_n è pari a 1; quindi, se per un certo n si ha $P < 1$, allora esiste almeno una colorazione di K_n senza K_p monocromatici.
Se $n = \lfloor 2^{\frac{p-2}{2}} \rfloor$, allora $log_2 n = \frac{p-2}{2}$ e $p = 2log_2 n + 2$ e dunque è molto probabile che una colorazione casuale di K_n non contenga un $K_{2log_2 n+2}$ monocromatico.

Esempio 2.12. Se vogliamo costruire una bicolorazione dei lati di K_{1024}, poichè $1024 = 2^{10}$ e $2log_2 2^{10} + 2 = 20 + 2 = 22$, è possibile colorare K_{1024} senza che ci siano K_{22} monocromatici lanciando una moneta $\binom{1024}{2}$ volte. La probabilità di ottenere una colorazione che contenga un K_{22} monocromatico è inferiore a $\frac{2^{11}}{20!}$.
Deduciamo quindi che $R(p,p)$ cresce esponenzialmente al crescere di p.

2.4 Ulteriori Teoremi

Teorema 2.13. *(SCHUR) Dato r, esiste $N = N(r)$ tale che se i primi N numeri naturali sono ripartibili in r classi ossia sono colorati con r colori, ci sono due numeri a e b tali che a, b e $a + b$ appartengono alla stessa classe(cioè hanno lo stesso colore).*

Dimostrazione. Sia $N \geq R(3, 3, \ldots, 3; 2)$ con 3 ripetuto r volte.
Una $r - colorazione$ dei numeri interi $1, 2, \ldots, N$ induce una $r - colorazione$ dei lati di K_N con r colori colorando il lato (i, j) con lo stesso colore dell'intero $|i - j|$. Per il teorema di Ramsey più generale, esiste, per definizione di N, un triangolo monocromatico $\{x, y, z\}$ vale a dire tre interi $x < y < z$ tali che $z - x, z - y$ e $y - x$ hanno lo stesso colore.
Posto $a = z - y$ e $b = y - x$ si ha $a + b = z - x$ e dunque la tesi. □

Estendiamo adesso il teorema di Ramsey dalla colorazione delle coppie a quella dei sottoinsiemi con più di due elementi; consideriamo il caso dei 3-sottoinsiemi e di 2 colori.

Teorema 2.14. *Siano $p, q \geq 3$. Allora esiste un intero positivo n tale che, colorando con due colori blu e rosso i $3 - sottoinsiemi$ di un $n - insieme$, questo contiene o un $p - sottoinsieme$ con tutti i 3-sottoinsiemi blu, oppure un $q - sottoinsieme$ con tutti i $3 - sottoinsiemi$ rossi.*

Dimostrazione. Lo si dimostra per induzione su $p+q$.
Se $p = 3$ e se non esistono $3 - sottoinsiemi$ blu significa che tutti i $3 - sottoinsiemi$ sono rossi e quindi si ha la tesi con $n = q$; se $q = 3$ vale l'analogo con $n = p$.
Siano $p, q > 3$ e assumiamo che la tesi sia vera per $(p-1)+q$ ossia, esiste n_1 tale che se coloriamo un insieme con n_1 elementi con due colori blu e rosso, allora o esiste un $(p-1) - sottoinsieme$ che ha tutti $3 - sottoinsiemi$ colorati di blu, oppure un $q - sottoinsieme$ con tutti i $3 - sottoinsiemi$ colorati di rosso. Analogamente, assumiamo che la tesi sia vera per $p + (q-1)$ e quindi esiste n_2 tale che se coloriamo un insieme di n_2 elementi con due colori blu e rosso, allora esiste o un $p - sottoinsieme$ con tutti i $3 - sottoinsiemi$ colorati di blu oppure un $(q-1) - sottoinsieme$ con tutti i $3 - sottoinsiemi$ rossi.
Sia $R = R(n_1, n_2; 2)$ e dimostriamo che $n = R+1$ è l'intero cercato.
Consideriamo l'insieme $V = \{1, 2, \ldots, R, R+1\}$ e lo coloriamo con due colori; da questa colorazione coloriamo il grafo completo K_R attribuendo al lato (i, j) il colore del $3 - sottoinsieme$ $\{i, j, R+1\}$.
Dalla definizione di R, esistono o un K_{n_1} con tutti i lati blu o un K_{n_2} con tutti i lati rossi. Assumiamo che si verifichi il secondo caso e sia V_2 il corrispondente insieme di vertici.
Se $i, j \in V_2$, la terna $\{i, j, R+1\}$ di elementi di V è blu ma per ipotesi induttiva, in V_2 esiste o un $p - sottoinsieme$ con tutti i $3 - sottoinsiemi$ blu o un $(q-1) - sottoinsieme$ con tutti i $3 - sottoinsiemi$ rossi.
Nel primo caso si ha un $p - sottoinsieme$ di V con tutte le terne blu e quindi il teorema è dimostrato. Se stiamo nel secondo caso, esiste un $(q-1) - sottoinsieme$ W di V_2 con tutti i $3 - sottoinsiemi$ rossi, quindi per ogni $i, j \in W$ il $3 - sottoinsieme$ $\{i, j, R+1\}$ è rosso e dunque i $3 - sottoinsiemi$ del $q - sottoinsieme$ $W \cup \{R+1\}$ sono rossi.

□

Osservazione 2.15. Se indichiamo $R(p, q; k)$ con $R_k(p, q)$, dalla dimostrazione del teorema deduciamo la seguente:

$$R_3(p, q) \leq R_2(R_3(p-1, q), R_3(p, q-1)) + 1.$$

Tale risultato ci consente di dimostrare l'esistenza dei numeri di Ramsey R_3 per induzione a partire da quella dei numeri di Ramsey R_2.

Se $1 < k < min(p, q)$, più in generale, si può dimostrare che per $k-sottoinsiemi$ vale la seguente:

$$R_k(p, q) \leq R_{k-1}(R_k(p-1, q), R_k(p, q-1)) + 1.$$

Osservazione 2.16. Diamo una ulteriore generalizzazione del teorema di Ramsey con $k = 2$.
Assumiamo che gli n vertici del grafo completo K_n siano numerati con gli interi $1, 2, \ldots, n$; allora esiste un insieme di p vertici, uno dei quali ha un numero minore di p e tale che il K_p corrispondente sia monocromatico.

3 Il caso infinito

Occupiamoci ora di una versione infinita del teorema di Ramsey. Come nel caso finito, partiamo dal **principio dei cassetti**:

$$se\ gli\ elementi\ di\ un\ insieme\ infinito\ sono\ colorati\ con\ un\ numero\ finito\ di\ colori,$$

$$allora\ esiste\ un\ sottoinsieme\ infinito\ monocromatico.$$

Teorema 3.1. *Siano k, r interi positivi e supponiamo che i $k-sottoinsiemi$ di un insieme infinito X siano colorati con r colori. Allora esiste un sottoinsieme infinito Y di X con tutti i $k-sottoinsiemi$ dello stesso colore.*

Da questo teorema deriva una versione infinita del teorema di Schur:

$$se\ si\ colorano\ i\ numeri\ naturali\ con\ r\ colori$$

$$esistono\ due\ numeri\ a\ e\ b\ tali\ che\ a, b\ e\ a+b\ hanno\ lo\ stesso\ colore.$$

Se diamo alla coppia (x, y) il colore di $|x-y|$ come nel caso finito, dal teorema, con $k=3$, segue che esiste un triangolo monocromatico e si ha il risultato come nel caso finito.

Un grafo si dice orientato se le coppie di vertici (u, v) sono coppie ordinate; un arco del tipo (u, v) si dice uscente da u ed entrante in v. Un cammino orientato infinito è una successione infinita di vertici distinti $v_0, v_1, \ldots,$ tale che, per $i = 0, 1, 2, \ldots,$ (v_i, v_{i+1}) è un lato orientato.

Lemma 3.2. *(KONIG) Consideriamo un albero infinito orientato nel quale da ogni vertice escono solo un numero finito di lati, e sia u un vertice tale che, per ogni n, esiste un cammino di lunghezza n il cui vertice iniziale è u. Allora esiste un cammino infinito il cui vertice iniziale è u.*

Dimostrazione. Dato che esistono solo un numero finito di lati uscenti da u, esiste almeno un lato (u, u_1) tale che per ogni n, u_1 è il punto di inizio di un cammino di lunghezza n. Ripetendo lo stesso ragionamento fatto per u anche per u_1, troviamo un cammino infinito $u, u_1, \ldots$ □

Grazie a questo lemma è possibile dimostrare la versione finita del teorema di Ramsey (teorema 3.3) usando quella infinita(teorema 3.1).

Teorema 3.3. *Siano r, k, p interi positivi. Allora esiste un intero n tale che se i $k - sottoinsiemi$ di un insieme con n elementi sono colorati con r colori, esiste un sottoinsieme con p elementi monocromatico.*

Dimostrazione. Sia $v_1, v_2, \dots$ insieme infinito di vertici e i corrispondenti grafi completi K_1 su v_1, K_2 su v_1 e v_2, ..., K_n su $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$
Vediamo il caso $k = 2$ (ossia i lati di K_n).
Supponiamo per assurdo che il teorema non sia valido per due interi r, p; ciò equivale a dire che per ogni intero positivo n esiste una $r - colorazione\ c_n$ dei lati di K_n che non crea K_p monocromatici.
Sia una colorazione c_{n+1} di K_{n+1}. Sopprimendo i lati che uniscono il vertice v_{n+1} di K_{n+1} ai vertici di K_n si ha un K_n colorato con una colorazione del tipo c_n, altrimenti K_n conterrebbe un K_p monocromatico e quindi K_{n+1} conterrebbe tale K_p.
Consideriamo l'albero i cui vertici sono colorazioni c_n di K_n che non creano K_p monocromatici e un lato è incidente a due vertici c_n, c_{n+1} se c_n è una restrizione di c_{n+1} ai lati di K_n.
Così facendo, si ha un numero finito di colorazioni e quindi anche i gradi dei vertici sono finiti e per ogni n, si ha un cammino di lunghezza n da c_1 a c_n ottenuto prendendo una c_n di K_n e considerando tutte le restrizioni fino a c_1.
Dunque, le ipotesi del lemma di Konig sono verificate ed esiste quindi un cammino infinito $C = \{c_1, c_2, \dots\}$. Se coloriamo i sottoinsiemi con 2 elementi dell'insieme infinito $N = \{v_1, v_2, \dots\}$ con le colorazioni $c_n \in C$ dei K_n, i lati di K_N(ossia le coppie dell'insieme N) vengono ripartiti nelle r classi date dai colori senza creare K_p monocromatici, contraddicendo il teorema di Ramsey nella versione infinita(teorema 3.1). □

Bibliografia

[Cas17] Fumagalli Casolo. *Corso di Teoria dei Grafi e Combinatoria*. 2016/2017.

[Mac] Machì. *Dispense del Corso di Combinatoria*.

[Wik] Wikipedia. *Teorema di Ramsey*.