

Graphs on Surfaces

Giuseppe Capobianco

April 29, 2021

Definizione

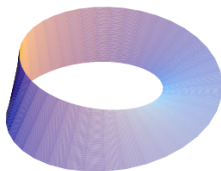
Una **superficie** è una varietà topologica M di dimensione 2, cioè uno spazio topologico connesso di dimensione 2 che è T_2 , N_2 e localmente euclideo.

- T_2 : $\forall p, q \in M$ esistono intorni $U_p, V_q \subset M$ t.c. $U_p \cap V_q = \emptyset$;
- N_2 : M ammette una base numerabile $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$;
- Loc. Euclideo: $\forall p \in M$ esiste un intorno aperto $U_p \subset M$ tale che $U_p \approx D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

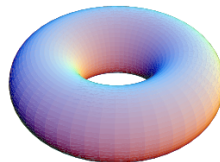
Esempio

La sfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è una superficie.

Ci sono due tipi diversi di superfici: le superfici orientabili e quelle non orientabili. La più semplice superficie non orientabile è il nastro di Möbius. Il toro invece è una superficie orientabile.



(a)



(b)

Fig. 10.24. (a) The Möbius band, and (b) the torus

Teorema

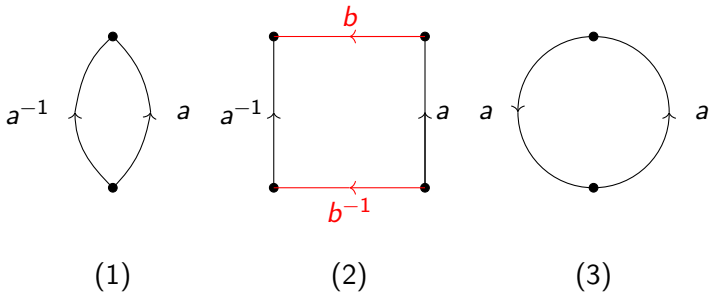
Sia P poligono regolare compatto contenuto in \mathbb{R}^2 con un numero pari di lati. Allora ogni relazione di equivalenza su P che identifichi i lati del bordo, definisce uno spazio topologico quoziente omeomorfo a una superficie compatta.

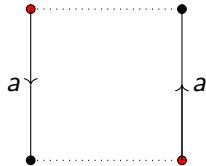
Teorema

Ogni superficie convessa compatta è omeomorfa a un poligono etichettato P / \sim con $P \subset \mathbb{R}^2$ un poligono con un numero pari di lati identificati a due a due.

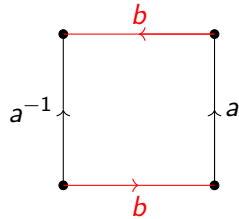
Esempi.

- (1) La sfera S^2 è omeomorfa al poligono etichettato aa^{-1} ;
- (2) Il toro T^2 è omeomorfo a $aba^{-1}b^{-1}$;
- (3) Il piano proiettivo reale \mathbb{RP}^2 è omeomorfo a aa .

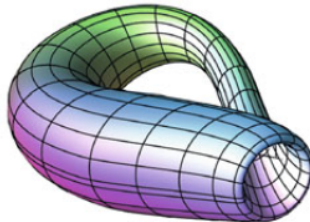
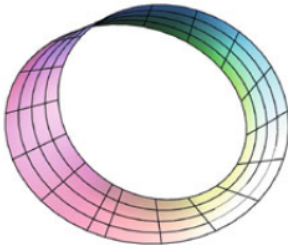




Nastro di Möbius



Bottiglia di Klein



Teorema

Ogni superficie topologica S si può costruire partendo dalla sfera S^2 effettuando due operazioni elementari:

- Aggiungere un manico (adding a handle);
- Fare un capovolgimento (adding a cross-cap).

Dimostrazione (idea).

Sia S^2 la sfera, $D_1, D_2 \subset S^2$ due dischi disgiunti dello stesso raggio e H un cilindro dello stesso raggio di D_1 e D_2 . L'operazione di aggiungere un manico consiste nel tagliare D_1 e D_2 da S^2 e incollare il cilindro H in modo tale da identificare un'estremità di H con il bordo di D_1 e l'altra estremità di H con il bordo di D_2 in S^2 .

Effettuando questa operazione su un numero k di coppie di dischi disgiunti si ottiene una superficie con k buchi distinti che chiamiamo S_k , superficie orientabile di genere k .

Si vede facilmente che il bordo del nastro di Möbius è omeomorfo al cerchio S^1 . Consideriamo $D \subset S^2$ un disco e B il nastro di Möbius con il bordo dello stesso raggio del bordo di D . Fare un capovolgimento consiste nell'eliminare D e incollare B ad S^2 in modo tale che il bordo di B coincida con il bordo di D .

Equivalentemente questa operazione consiste nell'identificare ogni punto del bordo di D con il suo punto antipodale. Come per i manici così per i capovolgimenti possiamo aggiungere k capovolgimenti distinti ottenendo una superficie che chiamiamo N_k . Ogni superficie orientabile è omeomorfa a S_k per qualche $k \geq 0$ e ogni superficie non orientabile è omeomorfa a N_k per qualche $k \geq 1$. Ad esempio il Toro T^2 è omeomorfo a S_1 e il piano proiettivo reale \mathbb{RP}^2 è omeomorfo a N_1 . E la superficie ottenuta aggiungendo $k > 0$ buchi e $h > 0$ capovolgimenti è omeomorfa a N_{2k+h} .

Teorema (Classificazione delle superfici compatte)

Ogni superficie compatta Σ è omeomorfa a una di queste tre:

- $S^2 \approx aa^{-1}$
- $S_k \approx a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}$
- $N_k \approx a_1a_1 \cdots a_ka_k$

per qualche $k \geq 1$.

Definizione

La caratteristica di Eulero di Σ è $c(\Sigma) = \begin{cases} 2 - 2k & \text{se } \Sigma \approx S_k \\ 2 - k & \text{se } \Sigma \approx N_k \end{cases}$
per ogni $k \in \mathbb{N}, k \geq 0$.

Osservazione

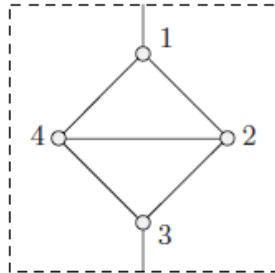
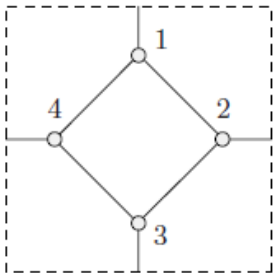
L'orientabilità e la caratteristica di Eulero sono invarianti topologici.

Definizione

- Un'immersione $G \hookrightarrow \Sigma$ di un grafo G in Σ è una mappa φ che manda i vertici di G in punti distinti di Σ e lati $e = xy \in E(G)$ in archi $\varphi(x) - \varphi(y)$ in Σ tali che nessun punto interno dell'arco è immagine di un vertice di G . Sia $\tilde{G} = \varphi(G)$ la rappresentazione di G su Σ .
- Una faccia di \tilde{G} è una componente connessa per archi di $\Sigma \setminus \tilde{G}$. Denotiamo con $f(\tilde{G})$ il numero delle facce di \tilde{G} .
- Un'immersione \tilde{G} è un'immersione cellulare se ogni faccia è omeomorfa a un disco aperto.

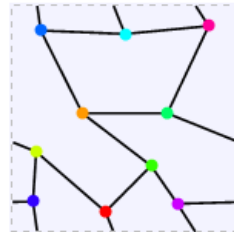
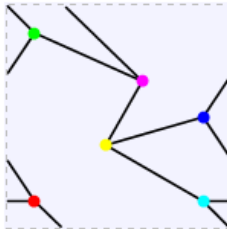
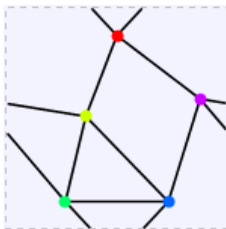
Esempio

La prima è un'immersione cellulare di K_4 sul toro, mentre la seconda non lo è perché la faccia delimitata dai cicli 1231 e 1431 è omeomorfa a un cilindro.

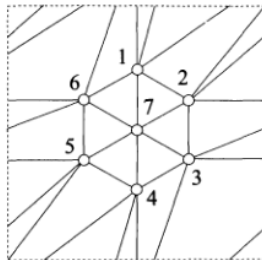
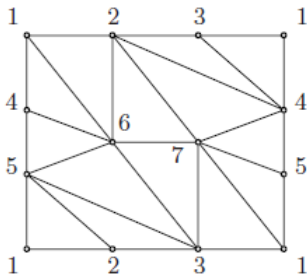


D'ora in poi consideriamo solo immersioni cellulari.

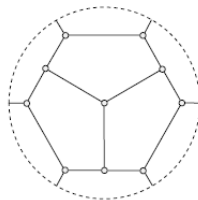
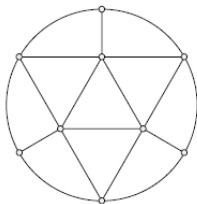
Abbiamo dimostrato che K_5 , $K_{3,3}$ e il grafo di Petersen non sono grafi planari, e quindi non si possono immergere nella sfera, superficie di genere 0. Ma aumentando il genere di 1, riusciamo a trovare una loro immersione nel toro.



Di seguito due immersioni di K_7 sul toro:



Immersione di K_6 e del grafo di Petersen sul piano proiettivo reale:



Teorema

Sia \tilde{G} un'immersione di un grafo connesso G su una superficie Σ .
Allora

$$v(\tilde{G}) - e(\tilde{G}) + f(\tilde{G}) = c(\Sigma)$$

Corollario (1)

Tutte le immersioni di un grafo connesso su una data superficie Σ hanno lo stesso numero di facce.

Corollario (2)

Sia G un grafo connesso semplice con $m = |E(G)|$ e $n = |V(G)|$ tale che esiste un'immersione su una superficie Σ .
Allora $m \leq 3(n - c(\Sigma))$.

Usando il corollario (2) si può dimostrare che per ogni superficie Σ ci sono grafi che non si possono immergere su di essa, perché basta prendere grafi G con n vertici e m lati tali che $m > 3(n - c(\Sigma))$.

Esercizio

Mostrare che

- K_8 non si può immergere sul toro $T^2 \approx S_1$;
- K_7 non si può immergere sul piano proiettivo $\mathbb{RP}^2 \approx N_1$.

Dim.

- Sappiamo che $c(S_1) = 2 - 2 = 0$ e che $n = 8$,
 $m = \frac{n(n-1)}{2} = 28$. Allora $28 > 3(8 - 0) = 24$;
- Sappiamo che $c(N_1) = 1$ e che $n = 7$, $m = \frac{n(n-1)}{2} = 21$. Allora
 $21 > 3(7 - 1) = 18$.

Definizione

Il **genere** (orientabile) $\gamma(G)$, di un grafo G è il più piccolo valore k tale che G si può immergere in S_k .

- G. Ringel dimostrò che per ogni $m, n \in \mathbb{N}$

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil$$

- G. Ringel e J.W.T Youngs dimostrarono che per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$$

Ad esempio $\gamma(K_{3,3}) = 1$, $\gamma(K_{4,4}) = 1$ e $\gamma(K_8) = 2$.

Negli anni 30, Erdős e König sollevarono la seguente questione: "per ogni superficie S esiste un numero finito di grafi G_1, \dots, G_k tali che qualsiasi grafo che non contiene una suddivisione di nessun G_i , si può immergere in S ?"

Intorno agli anni 70 Glover e Huneke risolsero il problema per il piano proiettivo reale facendo vedere, insieme a Wang, che la lista dei grafi "proibiti" $Forb(N_1)$ è finita ed è composta esattamente da 103 grafi.

Successivamente Robertson e Seymour dimostrarono che per ogni superficie S , $Forb(S)$ è una lista finita di grafi.

Proposizione

Per ogni superficie S c'è una lista finita di grafi G_1, \dots, G_n tali che un grafo arbitrario può essere topologicamente immerso in $S \Leftrightarrow G$ non contiene una suddivisione di nessun G_i .

Congettura (The orientable embedding conjecture)

Ogni grafo 2–connesso senza loops ha un'immersione circolare su qualche superficie orientabile.

Dove con immersione circolare si intende un'immersione in cui tutte le facce di \tilde{G} sono limitate da cicli.

Ora studiamo un approccio più combinatorio. Invece di partire da una superficie S e disegnare un grafo G su di essa, partiamo dal grafo e usiamo G come uno "scheletro" per una superficie S . Questa idea è alla base del *principio di rotazione di Heffter-Edmonds-Ringel* che si può riassumere come segue.

Sia G un grafo connesso con almeno un lato che si possa immergere su una superficie orientabile. Supponiamo di avere per ogni vertice $v \in V(G)$ una permutazione ciclica π_v dei lati incidenti a v (clockwise ordering). Consideriamo un lato $e_1 = v_1 v_2$ e il cammino chiuso $W = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_k e_k v_1$ costituito dai lati e_i tali che per ogni $i = 1, \dots, k$, vale $\pi_{v_{i+1}}(e_i) = e_{i+1}$, ponendo $e_{k+1} = e_1$. Diremo che qualsiasi cammino ottenuto con uno shift ciclico dei vertici di W coincide con esso e indicheremo con π l'insieme $\{\pi_v : v \in V(G)\}$, detto **sistema di rotazione**, in modo tale che W sarà un π -walk.

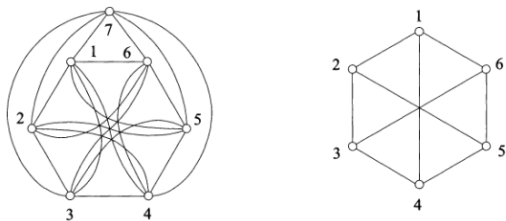


FIGURE 3.8. Rotation systems of K_7 and $K_{3,3}$

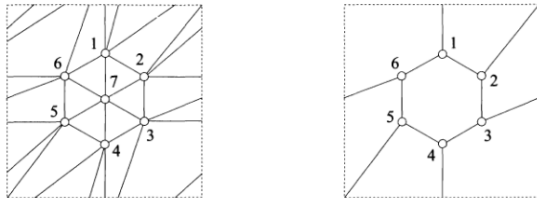


FIGURE 3.9. Embeddings of K_7 and $K_{3,3}$ in the torus

Per ogni π -walk del grafo G prendiamo il corrispondente poligono etichettato dello stesso numero di lati nel piano, detto π -poligono, in modo tale che sia disgiunto da tutti gli altri. Un lato appare in esattamente due π -poligoni quindi tramite operazioni di "taglia e cuci" incolliamo i lati con la stessa etichetta. Il risultato è un poligono etichettato corrispondente a una superficie orientabile. Allo stesso modo questa costruzione si può generalizzare per grafi immersi su superfici non orientabili considerando lo schema di immersione associato.

Teorema (Principio di rotazione di Heffter-Edmonds-Ringel)

Ogni immersione cellulare \tilde{G} è determinata in modo univoco, modulo omeomorfismo, dal suo sistema di rotazione.

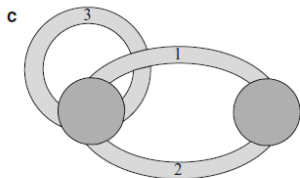
L'immersione di un grafo su una superficie può assumere forme diverse tutte equivalenti tra di loro: immersione cellulare, decomposizione in nastri, ribbon graph e ram graph come nella figura seguente:



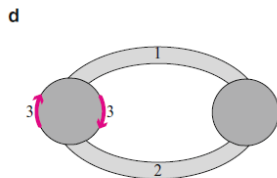
A cellularly embedded graph G



G as a band decomposition

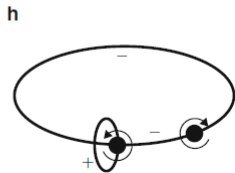
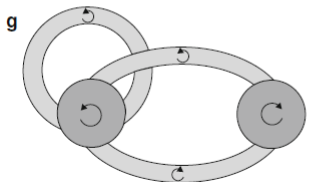
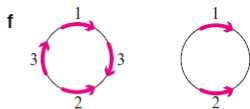
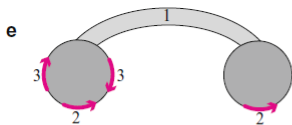


G as a ribbon graph

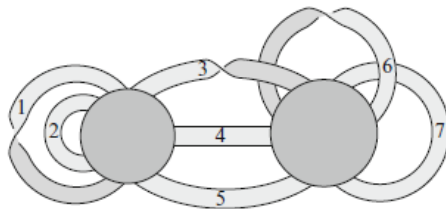


G as a ram graph $G\{3\}$

ma anche presentazione con frecce e sistema di rotazione segnato:



In generale data un'immersione cellulare di un grafo G su una superficie S , non è detto che il grafo ottenuto da G togliendo alcuni lati sia ancora un'immersione cellulare, mentre con il ribbon graph qualsiasi sottografo ottenuto eliminando lati o vertici di G è ancora un ribbon graph. Per questo motivo di solito si studiano i ribbon graphs.



A ribbon graph G

Bibliografia

-  Joanna A. Ellis-Monaghan, Iain Moffat, *Graphs on surfaces Dualities Polynomials and Knot* (2013 Springer-Verlag)
-  Bojan Mohar, Carsten Thomassen, *Graphs on surfaces* (2001, Johns Hopkins Studies)
-  Adrian Bondy, U.S.R Murty, *Graph theory*