Minimum Spanning Tree

Algoritmi di Bôruvka, Kruskal e Prim

Helena Rivera Dallorto

Università degli studi Roma Tre

Introduzione

Problema

Dato G grafo pesato e connesso, trovare una "rete" di connessione tra tutti i vertici che abbia peso *minimo*.

Esempio. G grafo pesato e connesso, dove

- vertici = città;
- lati = strade;
- peso = costo;

Costruire una rete stradale a costo *minimo* che connetta ogni città.

Accenni storici:

- 1926, Borůvka: prima definizione del problema e primo algoritmo;
- 1936, Jarnìk: semplificazione;
- 1956, Kruskal: algoritmo di Kruskal;
- 1957, Prim: algoritmo di Prim;
- 1959, Dijkstra;
- 1995, Karger, Klein e Tarjan: algoritmo randomizzato;
- 2000, Chazelle: algoritmo più veloce non randomizzato.

Definizioni e risultati teorici

Definizione 1

- Un **grafo pesato** è una coppia (G, w) dove
  - $G = (V(G), E(G))$ grafo;
  - $w : E \to \mathbb{R}$ peso dei lati.
- Il **peso** $w(F)$ di un sottografo F di G è la somma del peso dei suoi lati, i.e.
$$w(F) := \sum_{e \in E(F)} w(e)$$
- Dato (G, w) grafo pesato e connesso, (T^*, w') è un **albero ricoprente minimo (MST)** di (G, w), se T^* è un albero generante di G tale che
$$w'(T^*) = \min_{T \text{ generante di } G} w(T)$$
dove $w' = w_{|_{E(T)}}$.

Proposizione 1

Siano $G = (V(G), E(G))$ un grafo e $T = (V(T), E(T))$ un sottografo di G con $V(T) = V(G)$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. *T è un albero generante di G;*
2. *T è aciclico e ha $n - 1$ lati;*
3. *T è connesso e ha $n - 1$ lati;*
4. *T è connesso e ogni lato è un ponte;*
5. *in T ogni coppia di vertici e connessa da un unico cammino e non ci sono loops;*
6. *T è aciclico e aggiungere un qualsiasi lato crea un ciclo.*

Dim. Analogo ad un teorema visto a Lezione. □

Proposizione 2

Siano $G = (V(G), E(G))$ un grafo e $T = (V(G), E(T))$ albero generante di G.

1. *Sia $e \in E(T)$, allora $\exists \partial(X)$ taglio con $e \in \partial(X)$ tale che $\forall f \in \partial(X)$, $T \cup f \setminus e$ è un albero generante di G.*
2. *Sia $e \in E(G) \setminus E(T)$, allora $\exists C$ ciclo con $e \in E(C)$ tale che $\forall f \in E(C)$, $T \cup e \setminus f$ è un albero generante di G.*

Nota: con $T \cup e$ si intende $(V(T), E(T) \cup \{e\})$.

Dim. Segue dalla Proposizione 1.

1. $T \setminus e = T_1 \dot{\cup} T_2$: $\delta(X)$ con $X = V(T_1)$ è un taglio e $e \in \partial(X)$. (pt.4)
   $\forall f \in \partial(X)$, $T \cup f \setminus e$ contiene $n - 1$ lati ed è aciclico.
   $\Rightarrow T \cup f \setminus e$ è un albero generante. (pt.2).
2. $T \cup e$ contiene un ciclo C. (pt.6)
   $\forall f \in E(C)$, $T \cup e \setminus f$ contiene $n - 1$ lati ed è connesso.
   $\Rightarrow T \cup e \setminus f$ è un albero generante. (pt.3) □

Proposizione 3

Siano $\delta(X)$ un taglio e C un ciclo di $G = (V, E)$. Allora $|\partial(X) \cap E(C)|$ è pari.

Dim. (dalla Proposizione 2.18 vista a Lezione)
Il numero di volte che C passa da $v \in X$ a $w \in V \setminus X$ è uguale al numero di volte che C passa da X a $V \setminus X$.
$\Rightarrow \partial(X) \cap E(C)$ si decompone in due parti con stessa cardinalità. $\square$

Algoritmo avido

Dato (G, w) un grafo pesato e connesso:

Regola Rossa

1. Scegli un ciclo C senza lati rossi.
2. Tra i lati non colorati, seleziona un lato $e \in E(C)$ con peso $w(e)$ *massimo* e coloralo di rosso.

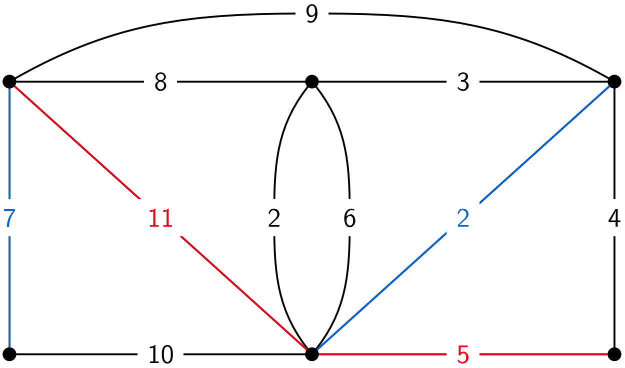
Regola Blu

1. Scegli un taglio $\partial(X)$ senza lati blu.
2. Tra i lati non colorati, seleziona un lato $e \in \partial(X)$ con peso $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

Regola Rossa

1. Scegli un ciclo C senza lati rossi.
2. Tra i lati non colorati, seleziona un lato $e \in E(C)$ con peso $w(e)$ *massimo* e coloralo di rosso.

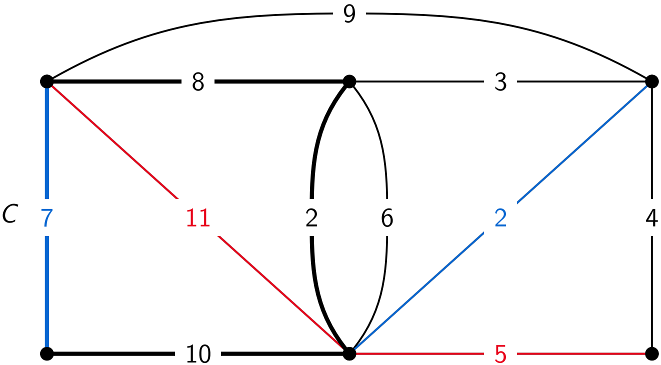
Esempio. Applicazione della regola rossa:



Regola Rossa

1. Scegli un ciclo C senza lati rossi.
2. Tra i lati non colorati, seleziona un lato $e \in E(C)$ con peso $w(e)$ *massimo* e coloralo di rosso.

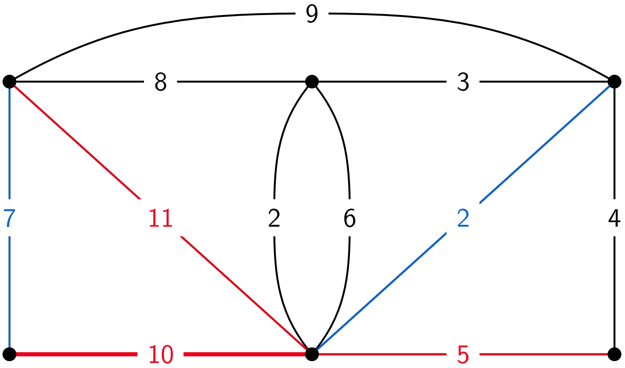
Esempio. Applicazione della regola rossa:



Regola Rossa

1. Scegli un ciclo C senza lati rossi.
2. Tra i lati non colorati, seleziona un lato $e \in E(C)$ con peso $w(e)$ *massimo* e coloralo di rosso.

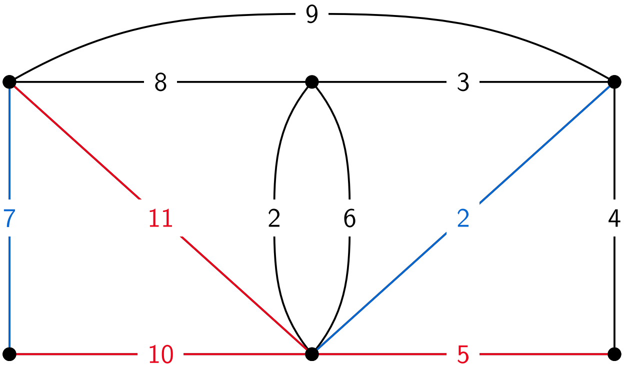
Esempio. Applicazione della regola rossa:



Regola Blu

1. Scegli un taglio $\partial(X)$ senza lato blu
2. Tra i lati non colorati, seleziona un lati $e \in \partial(X)$ con peso $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

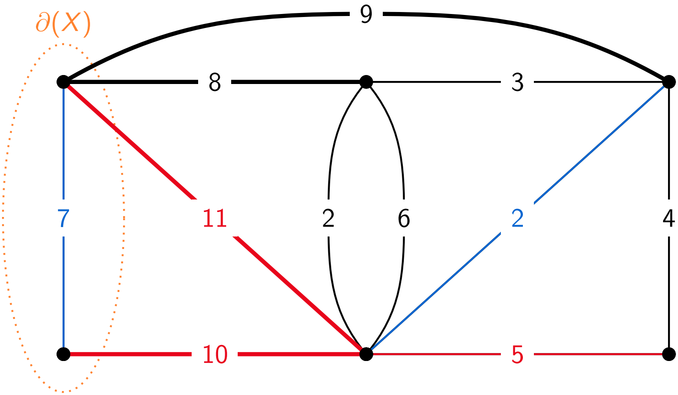
Esempio. Applicazione della regola blu:



Regola Blu

1. Scegli un taglio $\partial(X)$ senza lato blu
2. Tra i lati non colorati, seleziona un lati $e \in \partial(X)$ con peso $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

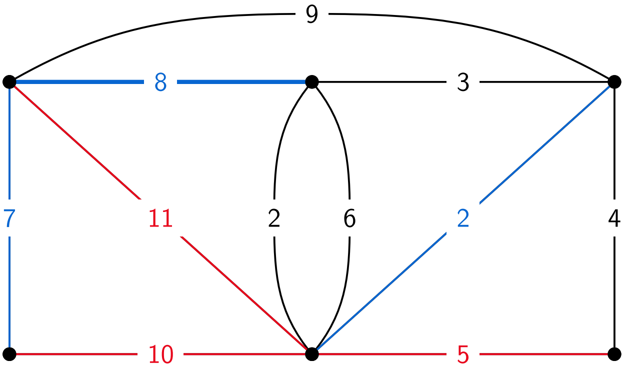
Esempio. Applicazione della regola blu:



Regola Blu

1. Scegli un taglio $\partial(X)$ senza lato blu
2. Tra i lati non colorati, seleziona un lati $e \in \partial(X)$ con peso $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

Esempio. Applicazione della regola blu:



Metodo avido (greedy)

Ricerca di una soluzione globalmente ottima basata sulla scelta di soluzioni localmente ottime ad ogni passo.

Dato (G, w) un grafo pesato e connesso:

Algoritmo avido per MST

Applica la regola rossa o blu (in qualsiasi ordine), finché tutti i lati di G non sono colorati. I lati blu formeranno un MST.

Lemma 1

Dato (G, w) grafo pesato e connesso, l'algoritmo avido rispetta il seguente invariante di colore:

"$\exists (T^*, w)$ MST che contiene tutti i lati colorati di blu
e nessuno dei lati colorati di rosso".

Dim. Induzione sul numero di passi.

Base: nessun lato è colorato e G è connesso.
$\Rightarrow \exists T^*$ MST che soddisfa l'invariante.

Lemma 1

Dato (G, w) grafo pesato e connesso, l'algoritmo avido rispetta il seguente invariante di colore:

"$\exists(T^*, w)$ MST che contiene tutti i lati colorati di blu e nessuno dei lati colorati di rosso".

Dim. Induzione sul numero di passi.

Passo (caso 1): Invariante vero prima di applicare la regola rossa.

- Siano C il ciclo scelto ed $e \in E(C)$ il lato scelto.
- Se $e \notin T^*$: T^* soddisfa l'invariante.
- Se $e \in T^*$: $T^* \setminus e = T_1 \dot\cup T_2, \exists T_1, T_2$ (Proposizione 1.4).
- Sia $X = V(T_1) \Rightarrow \exists f \in \partial(X) \cap E(C), f \neq e$ (Proposizione 3).
- Osserviamo che $f \notin T^*$: per l'invariante f *non* è blu.
- La regola rossa sceglie $e \Rightarrow w(e) \geq w(f)$ e f *non* è rosso.
- $T^* \cup f \setminus e$ è un MST che soddisfa l'invariante (Proposizione 2.1).

Lemma 1

Dato (G, w) grafo pesato e connesso, l'algoritmo avido rispetta il seguente invariante di colore:

"$\exists (T^*, w)$ MST che contiene tutti i lati colorati di blu e nessuno dei lati colorati di rosso".

Dim. Induzione sul numero di passi.

Passo (caso 2): Invariante vero prima di applicare la regola blu.

- Siano $\partial(X)$ il taglio scelto ed $e \in \partial(X)$ il lato scelto.
- Se $e \in T^*$: T^* soddisfa l'invariante.
- Se $e \notin T^*$: $T^* \cup e$ contiene un ciclo (Proposizione 1.5).
- Sia C tale ciclo $\Rightarrow \exists f \in \partial(X) \cap E(C), f \neq e$ (Proposizione 3).
- Osserviamo che $f \in T^*$: per l'invariante f *non* è rosso.[30]
- La regola blu sceglie $e \Rightarrow w(e) \leq w(f)$ e f *non* è blu.
- $T^* \cup e \setminus f$ è un MST che soddisfa l'invariante (Proposizione 2.2). $\square$

Teorema 1

Dato (G, w) grafo pesato e connesso, l'algoritmo avido termina, i.e. colora tutti i lati $e \in E(G)$, e i lati blu formano un MST di G.

Dim. Per assurdo.
Sia $e = uv \in E(G)$ un lato non colorato per cui non si può applicare né la regola rossa, né la regola blu.
I lati blu formano una foresta F.

- Se $u, v \in T_i \subset F$:
  $\Rightarrow \exists C$ ciclo in $T_i \cup e$ (Proposizione 1).
  $\Rightarrow$ Si può applicare la regola rossa al ciclo C. $\lightning$
- Se $u \in T_i, v \in T_j$ con $T_i, T_j \subset F$ distinti:
  $\Rightarrow \partial(X)$ con $X = V(T_i)$ è un taglio ed $e \in \partial(X)$.
  $\Rightarrow$ Si può applicare la regola blu al taglio $\partial(X)$. $\lightning$ $\square$

Algoritmi di Borůvka, di Kruskal e di Prim

Algoritmo di Borůka

Dato (G, w) un grafo pesato e connesso.
Convenzione: $\forall v \in V(G)$, $\{v\}$ è un albero blu.

Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

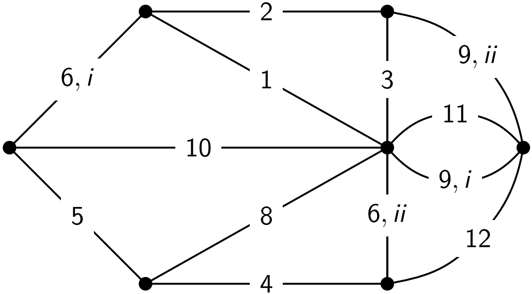
Note.

- Usa ripetutamente la regola blu.
- La correttezza è garantita se $w(e) \neq w(f), \forall e, f \in E(G)$ distinti. Se $\exists e, f \in E(G)$ tali che $w(e) = w(f)$ si possono numerare i lati e considerare l'ordine lessicografico dato dal peso e dal numero.
- Complessità computazionale: $O(m \log(n))$.
- Adatto al calcolo parallelo.

Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

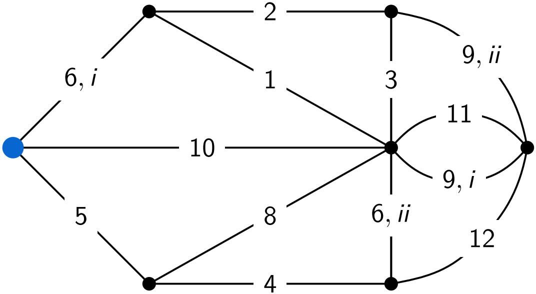
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

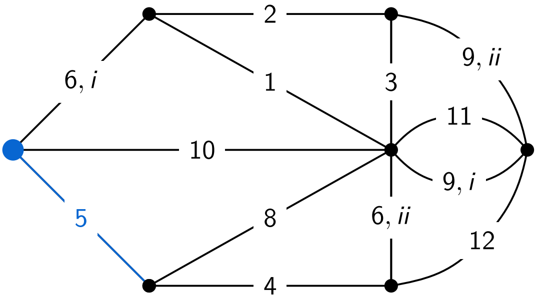
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

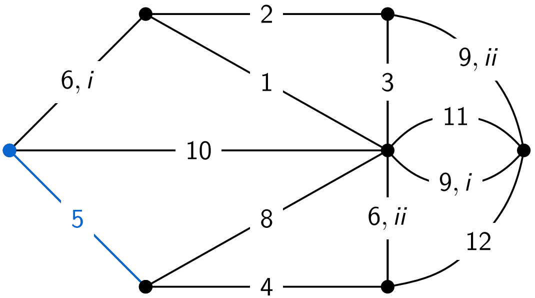
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

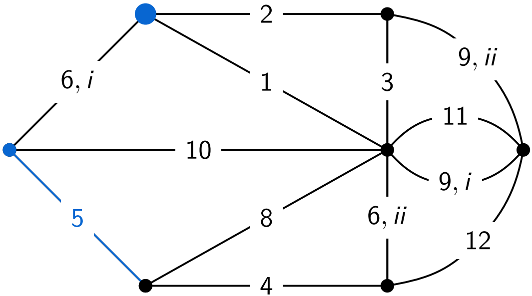
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

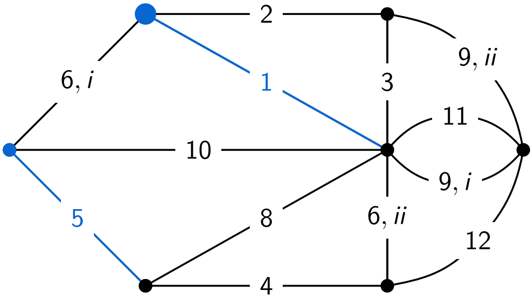
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

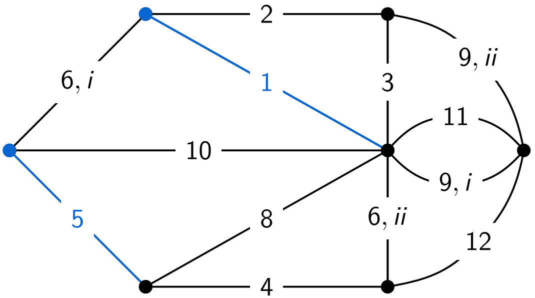
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

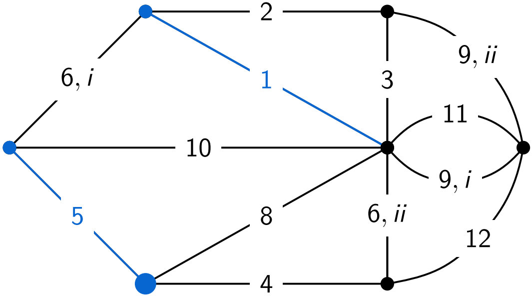
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

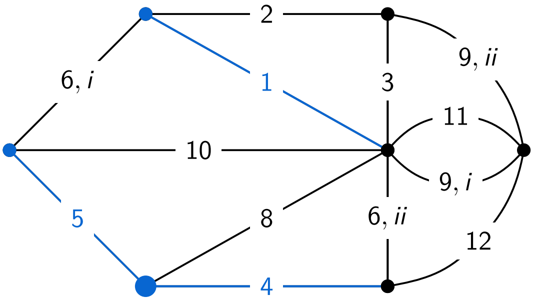
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

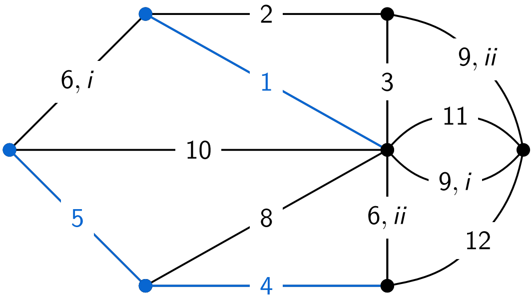
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

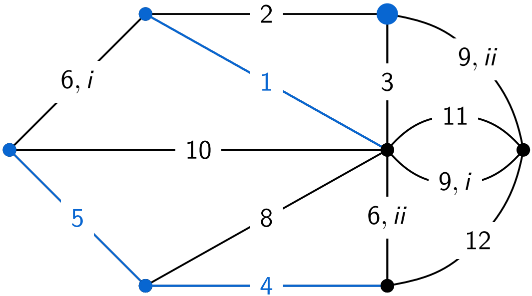
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

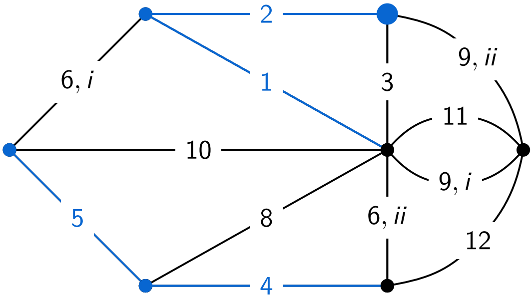
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

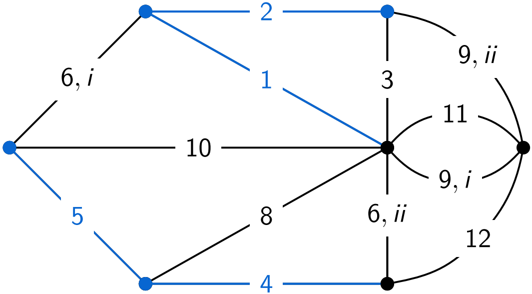
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

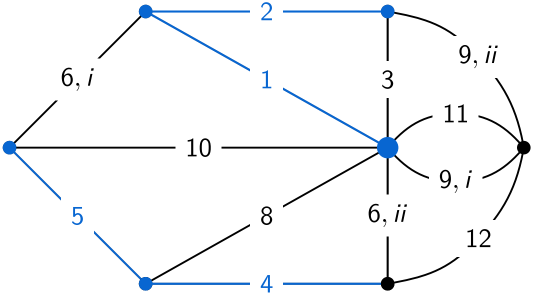
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

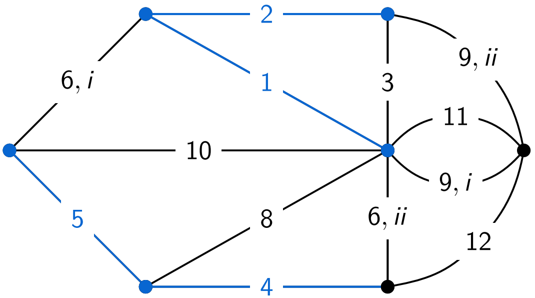
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

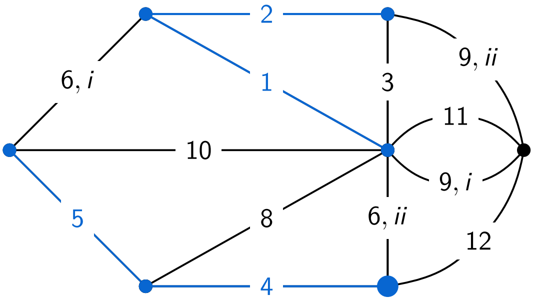
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

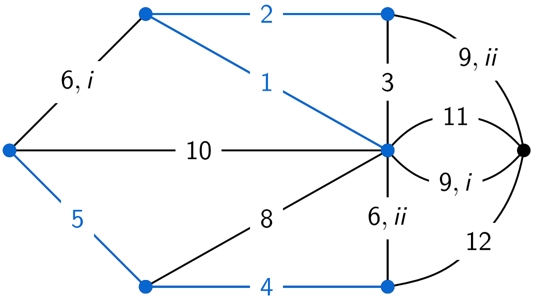
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

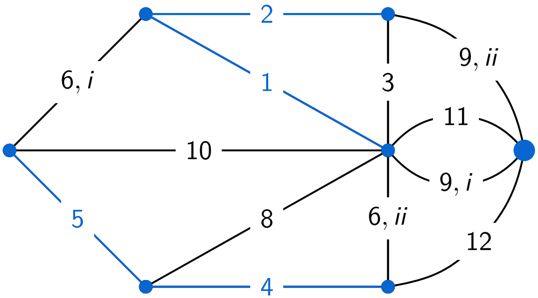
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

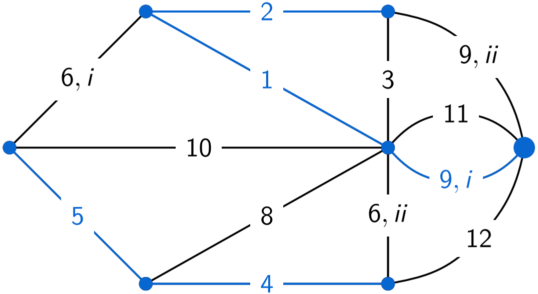
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

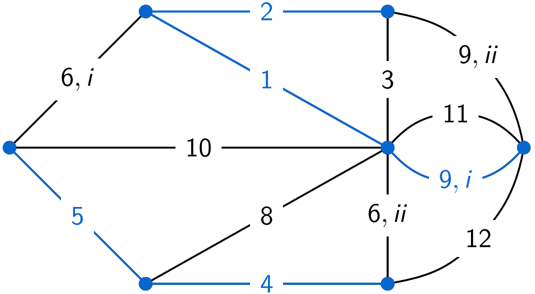
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

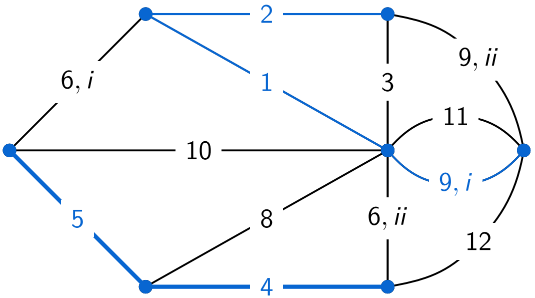
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

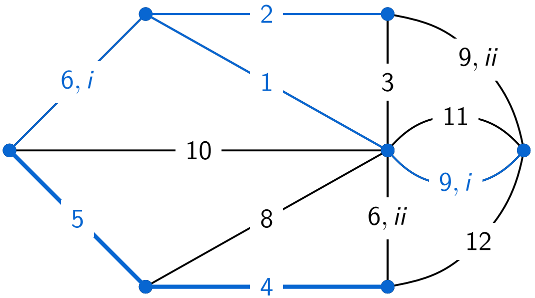
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

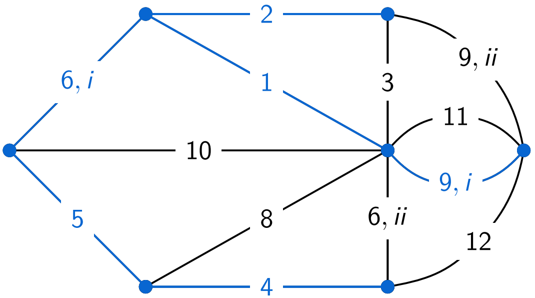
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

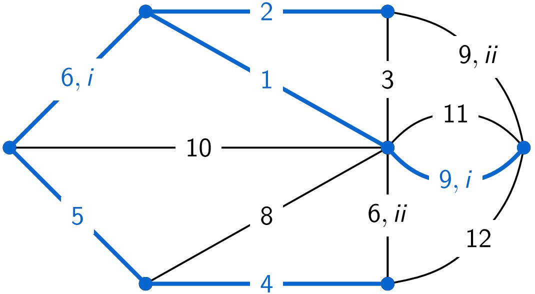
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Borůvka)

Per ogni albero blu T in G, seleziona un lato $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu. Ripeti finché non si ottiene un unico albero blu.

Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Algoritmo di Kruskal

Dato (G, w) un grafo pesato e connesso.
Sia $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ tale che $w(e_1) \leq \cdots \leq w(e_m)$.

Passo di colorazione (di Kruskal)

Per ogni lato $e_i = e_1, \ldots, e_m$: se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

Note.

- Caso particolare del Teorema 1.
- Complessità computazionale: $O(m \log(n))$.
- È necessario ordinare i lati in base al peso: $O(m \log(m))$.

Pseudocodice

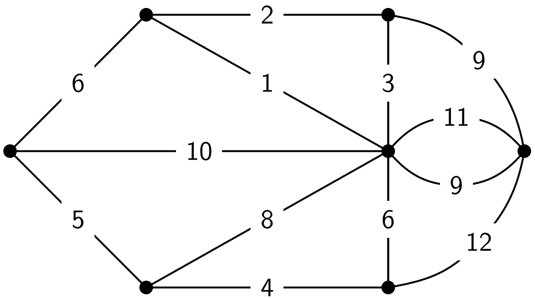
Kruskal($V(G)$, $E(G)$, w):

Ordina $e_1, \dots, e_m \in E(G)$ in modo tale che $w(e_1) \leq \dots \leq w(e_m)$
$T \leftarrow \{\ \}$
for $v \in V(G)$:
Make-Set(v)
for i **in** $1, \dots, m$:
  $uv \leftarrow e_i$
  if **Find-Set**(u) $\neq$ **Find-Set**(v):
    $T \leftarrow T \cup \{e_i\}$
    Union(u,v)
return(T)

Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

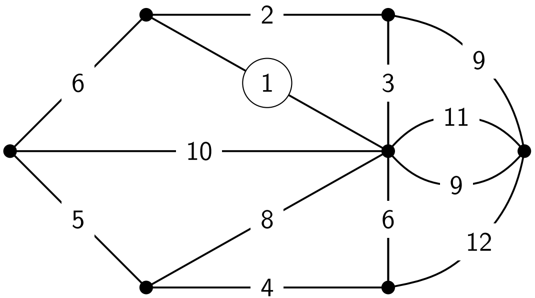
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

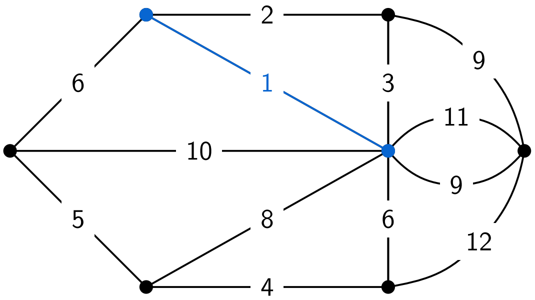
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

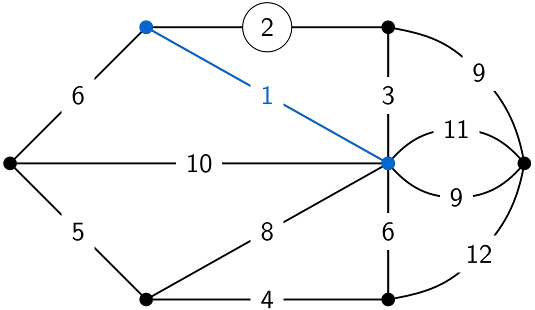
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

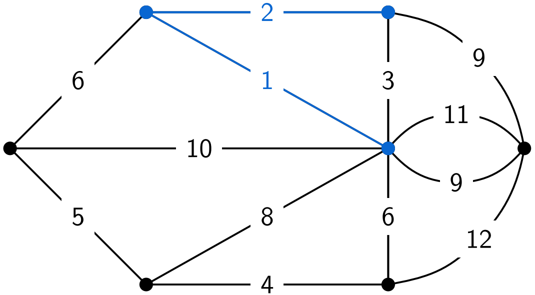
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

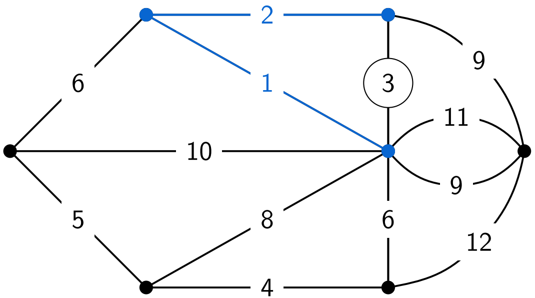
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

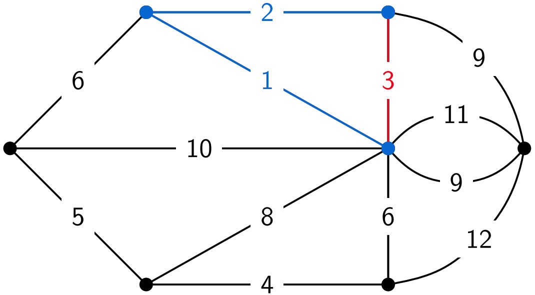
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

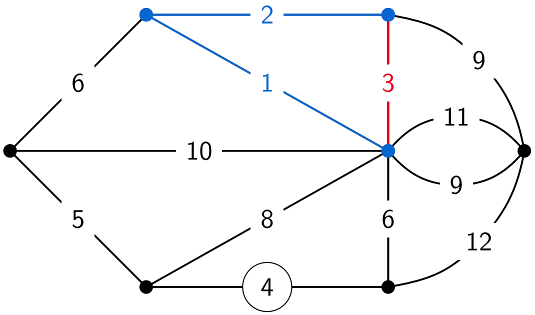
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

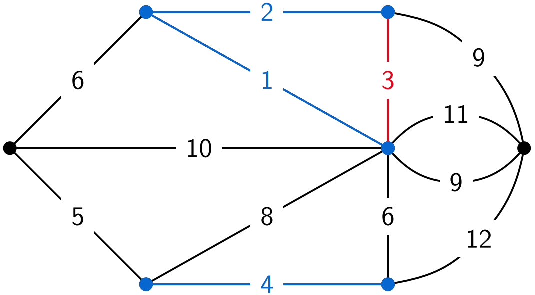
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

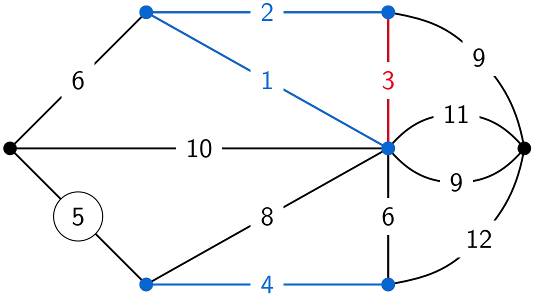
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

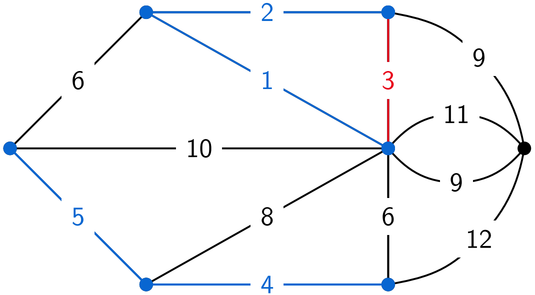
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

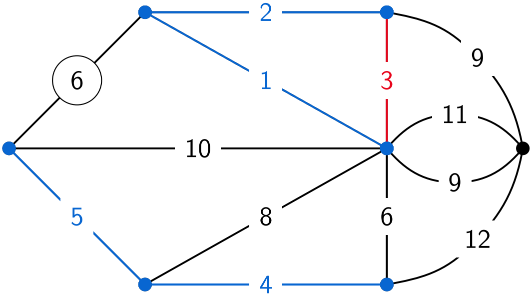
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

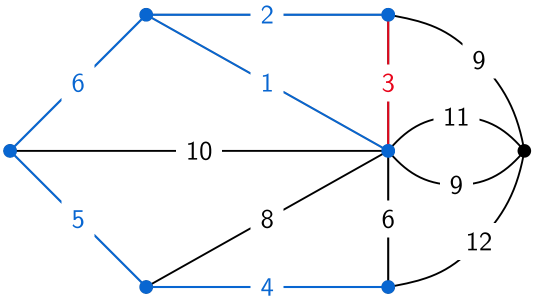
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

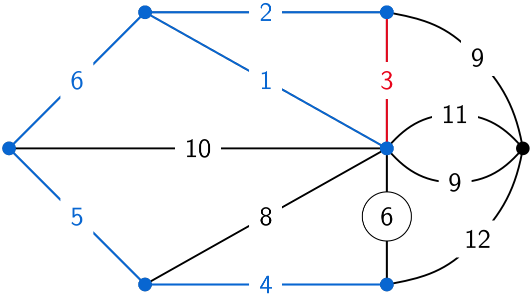
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

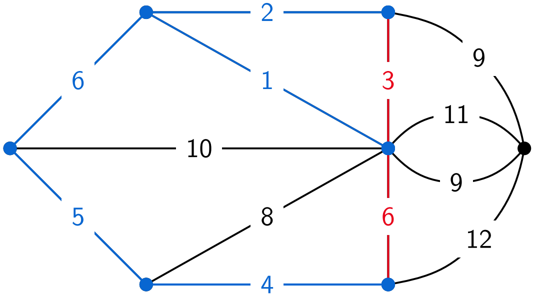
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

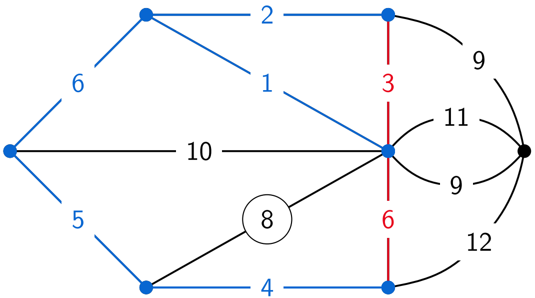
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

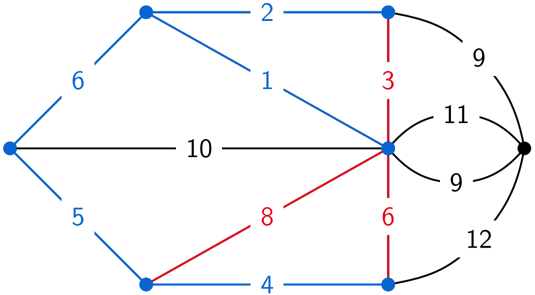
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

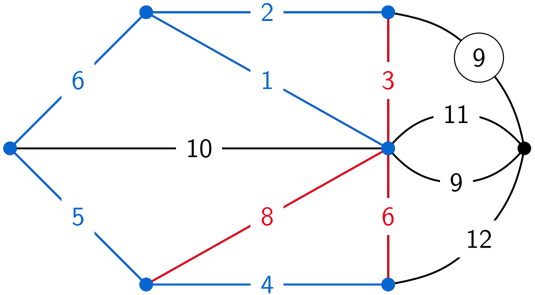
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

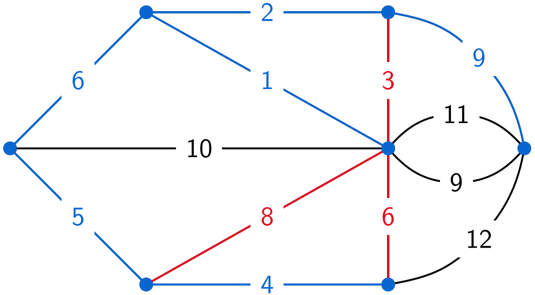
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

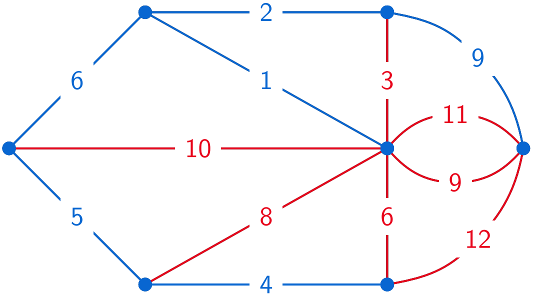
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

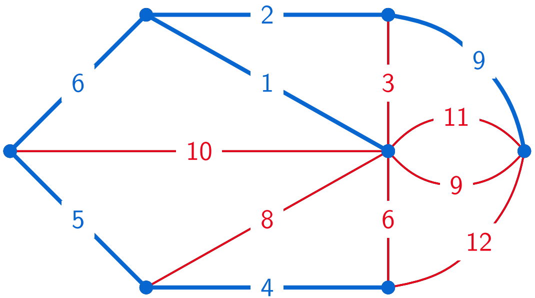
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Kruskal)

Considerando i lati nell'ordine $e_i = e_1, \ldots, e_m$. Se $e_i = uv$ è tale che u, v sono nello stesso albero blu, allora coloralo di rosso; altrimenti coloralo di blu.

Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Algoritmo di Prim

Dato (G, w) un grafo pesato e connesso.
Fissiamo $s \in V(G)$ un vertice qualunque.

Passo di colorazione (di Prim)

Ripeti per $n-1$ volte: sia T l'albero blu che contiene s, seleziona $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

Note.

- Usa ripetutamente la regola blu.
- Complessità computazionale: $O(m \log(n))$.
- Costruisce un unico albero blu non banale.

Pseudocodice

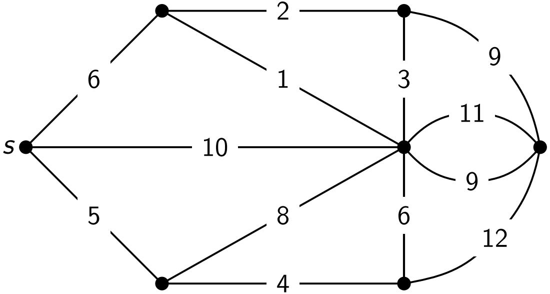
Prim($V(G)$, $E(G)$, w):

$S \leftarrow \{\ \}, T \leftarrow \{\ \}$
key[s] $\leftarrow 0$
for $v \in V(G) \setminus \{s\}$:
  key[v] $\leftarrow \infty$, $\pi[v] \leftarrow$ NULL
Crea Q coda di priorità vuota
for $v \in V(G)$:
  Insert(Q, v, key[v])
while $Q \neq \emptyset$:
  $u \leftarrow$ **Del-Min**(Q)
  $S \leftarrow S \cup \{u\}$, $T \leftarrow T \cup \{\pi[u]\}$
  for $e = uv \in E(G)$ tale che $v \notin S$:
  if $w(e) <$ key[v]:
    Decrease-Key($Q, v, w(e)$)
    key[v] $\leftarrow w(e)$, $\pi[v] \leftarrow e$
return(T)

Passo di colorazione (di Prim)

Ripeti per $n-1$ volte: sia T l'albero blu che contiene s, seleziona $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

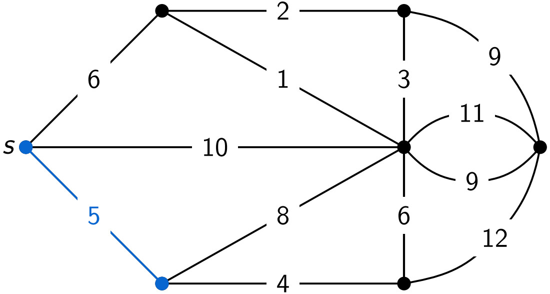
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Prim)

Ripeti per $n-1$ volte: sia T l'albero blu che contiene s, seleziona $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

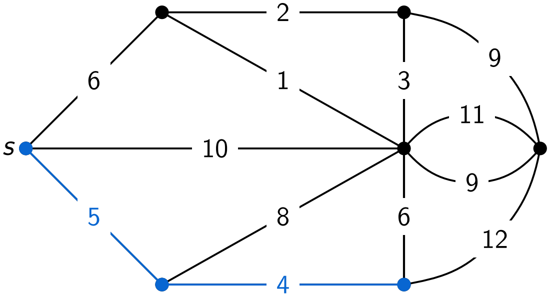
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Prim)

Ripeti per $n-1$ volte: sia T l'albero blu che contiene s, seleziona $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

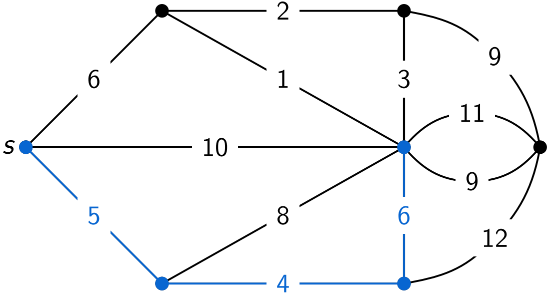
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Prim)

Ripeti per $n-1$ volte: sia T l'albero blu che contiene s, seleziona $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

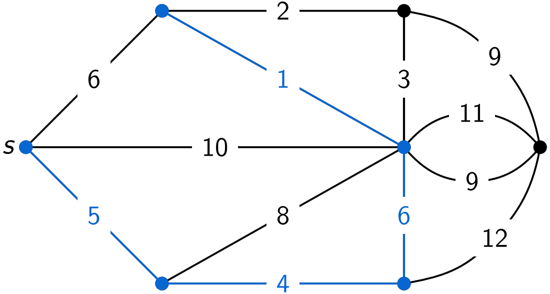
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Prim)

Ripeti per $n-1$ volte: sia T l'albero blu che contiene s, seleziona $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

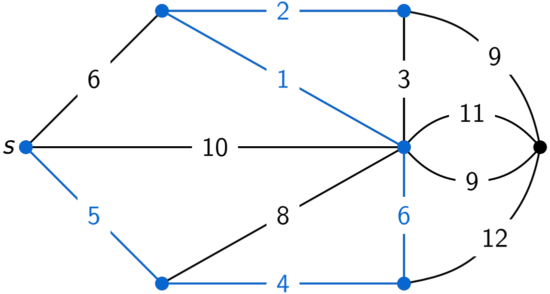
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Prim)

Ripeti per $n-1$ volte: sia T l'albero blu che contiene s, seleziona $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

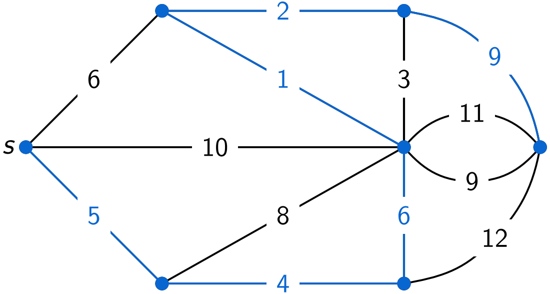
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Prim)

Ripeti per $n-1$ volte: sia T l'albero blu che contiene s, seleziona $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

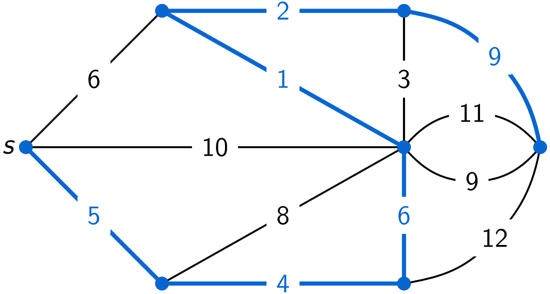
Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Passo di colorazione (di Prim)

Ripeti per $n-1$ volte: sia T l'albero blu che contiene s, seleziona $e \in \partial(V(T))$ con $w(e)$ *minimo* e coloralo di blu.

Esempio. Consideriamo il seguente grafo:



Approfondimenti:

- Algoritmo di colorazione al rovescio;
- Algoritmo round robin;
- Albero ricoprente massimo prendendo i pesi con segno opposto;
- Foresta ricoprente minima nel caso di grafi sconnessi;
- Legame tra metodo greedy e matroidi;
- Numerose applicazioni (telecomunicazioni, trasporti, impianti elettrici, clustering, elaborazione digitale delle immagini).

Bibliografia

R. L. Graham and Pavol Hell, *On the History of the Minimum Spanning Tree Problem*, Ann. History of Computing, 1985.

R. Tarjan, *Data Structure and Network Algorithms*, 1983.

V. Bonifaci, corso di IN440 presso Università degli Studi di RomaTre, 2020. http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/vbonifaci/in440/04GreedyAlgorithmsII.pdf

J. A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory*, 2008.

Wikipedia, *Minimum Spanning Tree*, 2021. https://en.wikipedia.org/wiki/Minimum_spanning_tree