

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico
2020/2021

GE460 - Teoria dei grafi - Esercitazione 1

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. (i) Si dimostri che in un gruppo di almeno due persone, esistono almeno due che hanno lo stesso numero di amici nel gruppo.

(ii) Descrivere un gruppo di 5 persone tale che ogni due persone tra loro hanno esattamente un amico in comune. È possibile trovare un gruppo di 4 persone con questa proprietà?

Esercizio 2. Un "grafo cubo" Q_k è un grafo i cui vertici corrispondono a sequenze $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ di 0 e 1 e tale che i lati corrispondono a vertici le cui etichette differiscono in una sola entrata. Si dimostri che:

(i) I grafi Q_k sono bipartiti;

(ii) I grafi Q_k hanno 2^k vertici, $k2^{k-1}$ lati e sono k -regolari.

Esercizio 3. Si dimostri che:

(i) ogni cammino è un grafo bipartito;

(ii) un ciclo è bipartito se e soltanto se ha lunghezza pari;

(iii) se $G = G[X, Y]$ è bipartito e regolare allora $|X| = |Y|$.

Esercizio 4. Sia G un grafo semplice. Si dimostri che gli elementi diagonali di entrambe A^2 e MM^T sono i gradi dei vertici di G .

Esercizio 5. Dato un grafo G con $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, la sequenza

$$(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$$

si chiama la sequenza dei gradi di G . Sia $\underline{d} := (d_1, d_2, \dots, d_n)$ una sequenza non crescente di interi non-negativi, i.e., $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$. Si dimostri che:

(i) Esiste un grafo con sequenza di gradi uguale a \underline{d} se e soltanto se $\sum_{i=1}^n d_i$ è pari;

(ii) Esiste un grafo privo di cappi con sequenza dei gradi uguale a \underline{d} se e soltanto se $\sum_{i=1}^n d_i$ è pari e $d_1 \leq \sum_{i=2}^n d_i$.

Esercizio 6. Dato un grafo G , si consideri il suo complemento \overline{G} .

(i) Esprimere la sequenza dei gradi di \overline{G} in termine di quella di G .

(ii) Mostrare che se G è disconnesso, allora \overline{G} è connesso. È vero il vice-versa?

Esercizio 7. Si G un grafo. Dimostrare che sono equivalenti:

- (i) G è connesso;
- (ii) Per ogni coppia di vertici $u, v \in V(G)$, esiste un cammino che comincia in u e finisce in v .
- (iii) Non è possibile scrivere G come unione disgiunta di grafi non nulli

$$G = G_1 \cup G_2.$$

Esercizio 8. Sia G un grafo semplice con n vertici e m lati. Si dimostri che:

- (i) esistono almeno due vertici di G con gradi uguali;
- (ii) $m \leq \binom{n}{2}$ e determinare quando vale l'uguale;
- (iii) se $m > \binom{n-1}{2}$ allora G è connesso e dimostrare che il risultato è ottimale.
- (iv) se $\delta > \frac{n-2}{2}$ allora G è connesso e dimostrare che il risultato è ottimale.