

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico
2019/2020

GE460 - Teoria dei grafi - Esercitazione 2

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. *Mostrare che l'unico sottografo pari di un'albero è banale.*

Esercizio 2. *Sia G un grafo e siano X e Y sottoinsiemi di V .*

(i) *Mostrare che $\partial(X \cup Y) \Delta \partial(X \cap Y) = \partial(X \Delta Y)$;*

(ii) *supponendo che G non ha cappi, mostrare che vale l'uguaglianza*

$$d(X) + d(Y) = d(X \cup Y) + d(X \cap Y) + 2e(X \setminus Y, Y \setminus X),$$

e che pertanto vale la disuguaglianza $d(X) + d(Y) \geq d(X \cup Y) + d(X \cap Y)$.

Esercizio 3. (i) *Per quali valori di n è Euleriano il grafo completo K^n ?*

(ii) *Per quali valori di k è Euleriano il k -cubo Q^k ?*

(iii) *Quali grafi bipartiti sono Euleriani?*

(iv) *È possibile che un grafo G con un numero pari di vertici e un numero dispari di lati sia Euleriano?*

Esercizio 4. *Sia G un grafo con n vertici, m lati e c componenti connesse.*

(i) *Quanti sottografi generanti ha G ?*

(ii) *Quanti lati è necessario aggiungere a G per ottenere un grafo connesso?*

(iii) *Quanti sottografi indotti ha G ?*

Esercizio 5. (i) *Mostrare che un'albero T con grado massimo $\Delta = k$ ha almeno k foglie.*

(ii) *Quali di questi alberi hanno esattamente k foglie?*

Esercizio 6. *Quanti elementi hanno lo spazio dei cicli e lo spazio dei tagli di un grafo G ?*

Esercizio 7. *Mostrare che, in un grafo G , la funzione distanza tra vertici soddisfa la disuguaglianza triangolare, i.e. dati $x, y, z \in V(G)$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.*

Esercizio 8. *Sia G un grafo k -regolare bipartito con $k \geq 2$. Mostrare che G non ha alcun ponte.*