

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico
2020/2021
GE460 - Teoria dei grafi - Esercitazione 3

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. *Un grafo G si dice dispari se ogni vertice di G ha grado dispari. Mostrare che G è dispari se e solo se $|\partial X| \equiv |X| \pmod{2}$, per ogni sottoinsieme $X \subset V$.*

Esercizio 2. *Sia G un grafo con matrice di adiacenza $A = (a_{u,v})$. Mostrare che il numero di camminate da u a v di lunghezza k in G è l'entrata (u, v) della matrice A^k .*

Esercizio 3. *Si mostri che la matrice di incidenza di un grafo è totalmente unimodulare se e soltanto se il grafo è bipartito.*

Esercizio 4. (i) *Siano T_1, T_2 sottoalberi di un'albero T . Mostrare che $T_1 \cap T_2$ e $T_1 \cup T_2$ sono sottoalberi di T se e soltanto se $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$.*

(ii) *Sia \mathcal{T} la famiglia di tutti i sottoalberi di un'albero T . Dedurre, per induzione su $|\mathcal{T}|$, che se qualsiasi coppia di elementi di \mathcal{T} ha un vertice in comune, allora esiste un vertice di T che appartiene a tutti gli elementi di \mathcal{T} .*

Esercizio 5. (i) *Sia G un grafo senza cappi né ponti. Mostrare che $t(G) \geq |E(G)|$.*

(ii) *Per quali grafi G vale l'uguaglianza?*

Esercizio 6. *Sia G un grafo connesso e $S \subset E(G)$. Si mostri che sono equivalenti:*

(i) *S è un co-albero di G ;*

(ii) *S non contiene alcun taglio minimale di G , ed è massimale con rispetto a questa proprietà;*

(iii) *S interseca ogni ciclo di G , ed è minimale con rispetto a questa proprietà.*

Esercizio 7. *Sia G un grafo connesso con $|V(G)| \geq 3$ e sia $e = uv$ un ponte di G . Mostrare che u o v è un vertice di taglio di G .*

Esercizio 8. *Sia G un grafo connesso con almeno due vertici e sia $v \in V(G)$ un vertice su cui non incide alcun cappio di G . Mostrare che v è un vertice di taglio e soltanto se è un vertice separante di G .*

Esercizio 9. *Sia G un grafo non separabile e sia $e = uv$ un lato di G . Mostrare che il grafo ottenuto da G suddividendo e è non separabile.*

Esercizio 10. *Esercizio 4.2.11 [BM] (Prüfer codes)*