Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2020/2021

GE460 - Teoria dei grafi - Esercitazione 4

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. *Sia G un grafo 2-connesso e sia $e \in E(G)$ tale che G/e non è 2-connesso. Si dimostri che G/e ha esattamente un vertice separante, precisamente quello che risulta della contrazione di e.*

Esercizio 2. *Sia G un grafo planare con c componenti connesse, n vertici, m lati e f facce. Mostrare che vale la seguente generalizzazione della formula di Eulero:*

$$n - m + f = c + 1.$$

Esercizio 3. *Sia G un grafo planare semplice con $n \geq 3$ vertici, m lati e f facce e supponiamo che nessuna faccia di G sia un triangolo. Mostrare che:*

(i) $m \leq 2n - 4$;

(ii) *G contiene un vertice di grado minore o uguale a 3.*

(iii) *In generale, se G è connesso e tutti i cicli di G hanno lunghezza almeno k, con $k \geq 3$ (ie., se $girth(G) \geq k$), allora $m \leq k\frac{n-2}{k-2}$.*

(iv) *Mostrare che il grafo di Petersen è non-planare.*

Esercizio 4. *(i) Per quali valori di n il grafo completo K_n è planare?*

(ii) *Per quali valori di n, m il grafo bipartito completo $K_{n,m}$ è planare?*

Esercizio 5. *Sia G un grafo planare G e sia G^* un suo duale (geometrico). Si dimostri che*

(i) *ogni ciclo C di una rappresentazione planare di G^* contiene almeno un vertice di G.*

(ii) *Un grafo planare G è connesso se e solo se G^{**} è isomorfo a G.*

(iii) *Se B è un taglio minimale di G, allora B^* è un ciclo di G^*.*

Esercizio 6. *Diciamo che un grafo G contiene un H-minore se H è isomorfo a un grafo ottenuto da G attraverso una sequenza di eliminazioni di vertici e lati e contrazioni di lati. Mostrare che*

(i) *un minore di un grafo planare è planare;*

(ii) *se G contiene una suddivisione di un grafo F allora contiene un F-minore;*

(iii) *se $\Delta(G) \leq 3$, è vero il vice-versa, ossia, se G contiene un F-minore, contiene anche una suddivisione di G.*

Esercizio 7. *Sia T un'albero generante di un grafo planare connesso G. Mostrare che $(E \setminus T)^*$ è un albero generante di G^*.*