Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2020/2021

GE460 - Teoria dei grafi - Primo foglio di esercizi

DOCENTE: MARGARIDA MELO

DA CONSEGNARE PER EMAIL O VIA TEAMS IN FORMATO PDF ENTRO: **23/03/2021**

Esercizio 1. *Sia G un grafo con m lati e n vertici e sia $e \in V(G)$ un lato di G. Si dimostri che:*

(i) *Se $m \geq n$, allora G contiene un ciclo;*

(ii) *Se G è aciclico, allora $m = n - c(G)$, dove $c(G)$ indica il numero di componenti connesse di G.*

(iii) *Se G è connesso e semplice, $n - 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.*

Esercizio 2. *Sia G un grafo semplice. Il grafo complementare di G è il grafo $\overline{G}$ con $V(\overline{G}) = V(G)$ e tali che un lato $e = uv$ appartiene a $\overline{G}$ se e solo se non appartiene a G. Un grafo semplice si dice auto-complementare se è isomorfo al suo grafo complementare $\overline{G}$.*

(i) *Si dimostri che se G è auto-complementare allora $|V(G)| = 4k$ o $4k + 1$, dove k è un intero.*

(ii) *Si dimostri che, per un grafo qualsiasi, $Aut(G) \cong Aut(\overline{G})$.*

Esercizio 3. *Sia A la matrice di adiacenza di un grafo G. Per definizione, un autovalore di G è un autovalore di A e il polinomio caratteristico di G è il polinomio caratteristico di A. Si dimostri che:*

(i) *tutti gli autovalori di G sono reali e quelli razionali sono interi;*

(ii) *se G è k-regolare, allora k è un autovalore di G con autovettore $\underline{1} = (1, 1, \ldots, 1)$;*

(iii) *nessun autovalore di G ha valore assoluto più grande di Δ;*

(iv) *se G è connesso e Δ è un autovalore di G allora G è regolare;*

(v) *se G è connesso e $-\Delta$ è un autovalore di G, allora G è regolare e bipartito.*

Esercizio 4. *Sia n un intero positivo.*

(i) *Si descriva una decomposizione di K_{2n+1} in cicli di Hamilton;*

(ii) *Si concluda che K_{2n} ammette una decomposizione in cammini di Hamilton.*

Esercizio 5. *Siano P e Q cammini in un grafo G con gli stessi punti iniziali e finali. Si dimostri che $P \cup Q$ contiene un ciclo. (sugg. usare la differenza simmetrica).*

Esercizio 6. *(i) Si dimostri che, se esistono due cicli distinti di un grafo G contenendo un certo lato e, allora G ha un ciclo che non contiene e.*

(ii) Si dimostri un risultato analogo sostituendo "ciclo" con "taglio".

Esercizio 7. *Un insieme $E \subset E(G)$ di lati di G si dice indipendente se E non contiene alcun ciclo di G. Si dimostri che*

(i) qualsiasi sottoinsieme di un insieme indipendente è indipendente;

(ii) Se I e J sono insiemi indipendenti e $|J| > |I|$, allora esiste un lato e che appartiene a J ma non a I e tale che $I \cup \{e\}$ è ancora indipendente.

(iii) Si dimostri che (i) e (ii) rimangono validi sostituendo la parola "ciclo" per "taglio".

Esercizio 8. *Sia G un grafo e $\mathcal{E}(G) = \mathcal{P}(E(G))$ lo spazio dei lati di G, e siano $\mathcal{C}(G)$ e $\mathcal{B}(G)$ i sottospazi dei sottografi pari e dei tagli di G. Si dimostri che*

(i) $(\mathcal{E}(G), \Delta)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_2$ isomorfo a $\mathbb{F}_2^{E(G)}$;

(ii) $\mathcal{C}(G)$ e $\mathcal{B}(G)$ sono sottospazi di $\mathcal{E}(G)$;

(iii) i cicli di G generano $\mathcal{C}(G)$;

(iv) i tagli minimali di G generano $\mathcal{B}(G)$;

(v) $\mathcal{B}(G)$ è lo spazio delle righe definito della matrice di incidenza M definita su $\mathbb{F}_2$ e $\mathcal{C}(G)$ è il suo complemento ortogonale.