**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2020/2021**

# GE460 - Teoria dei grafi - Secondo foglio di esercizi

DOCENTE: MARGARIDA MELO

DA CONSEGNARE IN FORMATO PDF ENTRO: **19/04/2021**

**Esercizio 1** (Il problema del commesso viaggiatore)**.** *Un commesso viaggiatore desidera visitare un certo numero di città per poi tornare al punto di partenza. Visto che i tempi di viaggio tra le diverse città sono diversi, si pone il problema di come pianificare il viaggio in modo da visitare tutte le città nel minor tempo possibile.*

*(i)* *Tradurre il problema del commesso viaggiatore in termini di grafi pesati (un grafo con pesi attribuiti ai lati) e cammini di Hamilton minimali (relativamente ai pesi).*

*(ii)* *Argomentare che, nel caso in cui il grafo $G$ ammetta un cammino di Hamilton, questo problema si può ridurre al caso in cui $G = K^n$ è un grafo completo.*

*(iii)* *Dare un'esempio per mostrare che la procedura seguente, conosciuta come "Euristica greedy", non risolve per forza il problema del commesso viaggiatore.*

- *Selezionare un vertice $v \in V(G)$;*
- *Cominciando con il cammino banale $\{v\}$, costruire un cammino di Hamilton aggiungendo ogni volta un lato di peso minimale tra l'ultimo vertice del cammino già costruito e un vertice che non sia ancora presente nel cammino;*
- *Formare un ciclo di Hamilton scegliendo il lato tra i vertici estremi del cammino di Hamilton.*

**Esercizio 2.** *Dato un grafo diretto $G$ e $v \in V(G)$, si denoti con* $\mathrm{indeg(v)}$ *il numero di archi della forma $uv$ e con* $\mathrm{outdeg(v)}$ *il numero di archi della forma $vw$, con $u, w \in V(G)$. Si dimostri che*

*(i)* $\sum_{v\in V(G)} \mathrm{indeg(v)} = \sum_{\mathrm{v}\in \mathrm{V(G)}} \mathrm{outdeg(v)}$ *(questo risultato è conosciuto come il Handshaking Dilemma).*

*(ii)* *se $G$ è connesso (come grafo non diretto) allora $G$ è Euleriano (i.e., esiste un ciclo diretto contenendo tutti gli archi di $G$) se e solo se $\forall v \in V(G), \mathrm{indeg(v)} = \mathrm{outdeg(v)}$.*

**Esercizio 3.** *Sia $G$ un grafo connesso e sia $M$ la sua matrice di incidenza.*

*(i)* *Mostrare che le colonne di $M$ corrispondenti a un sottoinsieme $S \subset E(G)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{F}_2$ se e soltanto se $G[S]$ è aciclico.*

*(ii) Dedurre che esiste una corrispondenza biunivoca tra le basi dello spazio delle colonne di $M$ su $\mathbb{F}_2$ e gli alberi generanti di $G$.*

**Esercizio 4** (Tree exchange property)**.** *Sia $G$ un grafo connesso, $T_1$ e $T_2$ due alberi generanti di $G$ e sia $e \in T_1 \setminus T_2$. Si dimostri che:*

*(i) esiste $f \in T_2 \setminus T_1$ tale che $T_1 \setminus \{e\} \cup \{f\}$ è un'albero generante di $G$;*

*(ii) esiste $f \in T_2 \setminus T_1$ tale che $T_2 \setminus \{f\} \cup \{e\}$ è un'albero generante di $G$;*

**Esercizio 5.** *Il duale algebrico di un grafo $G$ è un grafo $H$ per il quale esiste una biezione $\theta : E(G) \to E(H)$ mandando ogni ciclo di $G$ in un taglio minimale di $H$ e ogni taglio minimale di $G$ in un ciclo di $H$.*

*(i) Si mostri che:*

  *(a) l'ottaedro e il cubo sono duali algebrici.*

  *(b) $K_{3,3}$ non ha alcun duale algebrico.*

*(ii) Sia $G$ un grafo connesso che ammette un duale algebrico $H$ connesso, con biezione $\theta$.*

  *(a) Si mostri che $T$ è un'albero generante di $G$ se e soltanto se $\theta(T)$ è un co-albero di $H$.*

  *(b) Concludere che $t(G) = t(H)$.*

**Esercizio 6.** *Sia $G$ un grafo e $e \in E(G)$ un lato di $G$. Mostrare che:*

*(i) Se $G \setminus e$ è non-separabile e $e$ non è un cappio di $G$, allora $G$ è non-separabile.*

*(ii) Se $G/e$ è non-separabile e $e$ non è né un cappio né un ponte di $G$, allora $G$ è non-separabile.*

**Esercizio 7.** *Sia $G$ un grafo connesso e consideriamo la decomposizione in blocchi di $G$. Mostrare che*

*(i) $G$ è pari se e solo se ogni blocco di $G$ è pari;*

*(ii) $G$ è bipartito se e solo se ogni blocco di $G$ è bipartito;*

*(iii) $T \subset G$ è un'albero generante di $G$ se e solo se $T \cap B$ è un'albero generante di $B$, per ogni blocco $B$ di $G$.*