Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2019/2020

GE460 - Teoria dei grafi - Terzo foglio di esercizi

Docente: Margarida Melo

Da consegnare per email entro: **21/05/2021**

Esercizio 1 (Connettività per lati). *Siano $x, y \in V(G)$ vertici distinti. Definiamo la connettività locale per lati tra x e y, $p'(x, y)$, come il numero massimo di cammini in G tra x e y che non hanno lati in comune. Diciamo poi che un grafo non banale G è k-connesso per lati se $p'(u, v) \geq k$, $\forall u, v \in V(G), u \neq v$. La connettività per lati di un grafo G, che denotiamo con $\kappa'(G)$, è il più grande valore di k tale che G è k-connesso per lati (per convenzione se G è banale $\kappa'(G) = 1$). Si dimostri che*

(i) *Un grafo è 1-connesso per lati se e soltanto se è 1-connesso (per vertici).*

(ii) *Valgono per qualsiasi grafo G, le disuguaglianze*

$$\kappa \leq \kappa' \leq \delta,$$

dove δ è il grado minimo di un vertice di G. In particolare, un grafo k-regolare è, al massimo, k-connesso.

(iii) *Se G è 3-regolare, allora $\kappa = \kappa'$.*

Esercizio 2. *Sia G un grafo e $e \in E(G)$ un lato di G. Mostrare che:*

(i) *Se G è k-connesso, allora G/e è $(k-1)$-connesso;*

(ii) *Se $|V(G)| \geq 3$, allora G/e è k-connesso per lati.*

(iii) *Se G è planare, allora G/e è planare.*

Esercizio 3. *Sia G un grafo planare connesso e G^* il suo duale (geometrico).*

(i) *Mostrare che se G è 3-connesso, allora G^* è semplice.*

(ii) *Mostrare che G è bipartito se e solo se G^* è pari.*

(iii) *Un taglio minimale di Hamilton di un grafo connesso G è un taglio minimale B tale che tutte le componenti di $G \setminus B$ sono alberi. Sia G un grafo planare che contiene un ciclo di Hamilton C. Mostrare che C^* è un taglio minimale di Hamilton di G^*.*

Esercizio 4. *Sia G un grafo che ammette un duale algebrico G^*. Mostrare che*

(i) *Un sottografo di G ammette un duale algebrico.*

(ii) *Un grafo omeomorfo a G ammette un duale algebrico (un grafo H si dice omeomorfo a G se G e H hanno suddivisioni isomorfe).*

Esercizio 5. *Sia G un grafo e $\mathcal{C}$ il suo spazio vettoriale dei cicli. Una base B di $\mathcal{C}$ si dice una 2-base se ogni elemento di B è un ciclo e ogni lato del grafo appartiene al massimo a due di questi cicli. Mostrare che:*

(i) *se G è planare, G ammette una 2-base;*

(ii) *K_5 e $K_{3,3}$ non ammettono 2-basi.*

(iii) *un grafo G è planare se e solo se $\mathcal{C}$ ha una 2-base (questo risultato è un teorema di MacLane).* Sug. *Usare il teorema di Kuratovski.*

Esercizio 6. *Si dimostri che una matroide M si può definire attraverso un insieme $E \neq \emptyset$ e una collezione $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di M chiamati cicli o circuiti tali che*

(i) *$\emptyset$ non è un ciclo;*

(ii) *Un ciclo non contiene propriamente nessun altro ciclo;*

(iii) *Dati due cicli distinti C_1 e C_2 e un elemento $e \in C_1 \cap C_2$, esiste un ciclo C_3 in $C_1 \cup C_2$ che non contiene e.*