# Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2020/2021

# GE460 - Teoria dei grafi - Quarto foglio di esercizi

Docente: Margarida Melo

Da consegnare per email entro: **9/06/2021**

**Esercizio 1.** *Sia* $B$ *una base di una matroide* $M$*,* $f \in E(M)$ *e* $e \in E(M) \setminus B$*. Si dimostri che* $(B \cup e) \setminus f$ *è una base di* $M$ *se e solo se* $f \in C(e, B)$ *(si ricordi che con* $C(e, B)$ *indichiamo il circuito fondamentale associato a* $B$ *e ad* $e$*.*

**Esercizio 2.** *Sia* $M$ *una matroide in* $E$ *e si definisca una funzione* $r_1(X) := |X| - r(M) + r(E - X)$*.*

*(i) Mostrare direttamente che* $r_1$ *soddisfa gli assiomi (R1), (R2) e (R3), e quindi che* $r_1$ *definisce una funzione rango in una matroide* $M_1$ *in* $E$*.*

*(ii) Mostrare direttamente che* $B$ *è una base di* $M_1$ *se e solo se* $E - B$ *è una base di* $M$*.*

**Esercizio 3.** *Mostrare che, data una matroide* $M$*, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

*(i)* $M$ *è uniforme;*

*(ii)* $M$ *non ha circuiti di cardinalità minore di* $r(M) + 1$*.*

*(iii) ogni circuito di* $M$ *interseca ogni cocircuito.*

**Esercizio 4.** *(i) Mostrare che dato* $X \subset E(M)$*, la chiusura di* $X$*, cl*$(X)$*, è uguale all'intersezione di tutti i flat che contengono* $X$*.*

*(ii) Se* $X \subset Y \subset E(M)$ e $\mathrm{rk}(X) = \mathrm{rk}(Y)$*, allora cl*$(X) =$*cl*$(Y)$*.*

**Esercizio 5.** *Sia* $M$ *una matroide in* $E$*.*

*(i) Siano* $X$ *e* $Y$ *flats di* $M$ *con* $Y \subset X$ *e* $r(Y) = r(X) - 1$*. Mostrare che esiste un'iperpiano* $H$ *di* $M$ *tale che* $Y = H \cap X$*.*

*(ii) Dato* $X \subset E$*, mostrare che* $X$ *è un'iperpiano se e solo se* $E \setminus X$ *è minimale tra tutti i sottoinsiemi di* $E$ *che intersecano tutte le basi di* $M$*.*

**Esercizio 6.** *Sia* $M$ *una matroide e* $w : E(M) \to \mathbb{R}$ *una funzione iniettiva, che attribuisce un peso agli elementi di* $M$*. Mostrare che* $M$ *ha un'unica base di peso massimale.*

**Esercizio 7.** *Sia* $G$ *un grafo planare connesso. Usare dualità per matroidi per mostrare che vale la formula di Euler, i.e., che*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$