Università degli Studi “Roma Tre”

Seminario per il corso di

Teoria dei Grafi

Titolo

Semplici applicazioni di teoria dei grafi: lemma di Sperner, teorema dei cinque colori, il problema del cammino minimo e il problema del commesso viaggiatore

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Prof.ssa
Ana Margarida Mascarenhas Melo

Ing.
Barbara Galati

Marzo 2021

INDICE

INTRODUZIONE

L'obiettivo di questo mio lavoro è quello di stimolare l'interesse, da parte di ragazzi iscritti al triennio delle scuole superiori, per una materia che utilizza nozioni di logica, di geometria, di probabilità, di algebra e di programmazione: Teoria dei Grafi.

Lo scopo del primo capitolo sarà principalmente di dare le definizioni e le notazioni base, necessarie per guidare lo studente per un approccio semplice a questa materia che troverà nella maggior parte degli indirizzi di studi scientifici.

Nel secondo capitolo ci sarà un accompagnamento alle prime "proposizioni" della teoria dei grafi come il lemma di handshaking e il lemma di Sperner, i quali mettono basi per dimostrazioni di teoremi importanti, come quello del punto fisso di Brouwer. Per rendere la lettura più attraente si darà qualche accenno ad esempi che mettano in pratica ciò che è stato esposto, in particolare si darà una semplice dimostrazione del teorema dei cinque colori che ha ampie applicazioni soprattutto topologiche.

Il terzo capitolo si presenterà più dinamico, in modo da dare la possibilità allo studente di mettere in pratica la soluzione di alcuni problemi come quello del "commesso viaggiatore" e del "percorso minimo"; per quest'ultimo si proporrà l'algoritmo di Dijkstra.

In qualunque situazione e soprattutto nello scenario che stiamo vivendo, diventa fondamentale il rapporto tra insegnante allievo perché base di una crescita reciproca, affinché quest'ultimo trovi il proprio percorso professionale nel quale possa essere soddisfatto e felice anche personalmente.

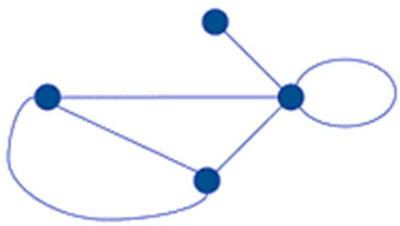
CAPITOLO 1

1.1 DEFINIZIONI

In questa prima parte verranno esposte le definizioni di base della Teoria dei Grafi con un approccio semplificato.

Def. Un **grafo** G è una tripla costituita da un insieme di vertici V(G) detti anche nodi, un insieme di archi E(G) e una relazione, detta relazione d'incidenza, che associa un arco ad una coppia di vertici, detti estremi.Un grafo può essere rappresentato graficamente mediante punti per indicare i **nodi** e da linee e curve per gli **archi**.

Def. Un **loop** o cappio è un arco i cui estremi coincidono. Si chiamano **archi multipli**, gli archi i cui estremi sono gli stessi.



Def. Si definisce **grafo semplice** un grafo privo di loop e di archi multipli.

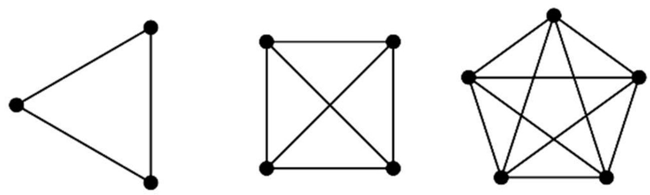
Def. Due vertici si dicono adiacenti se esiste un arco che li collega; essi si dicono **incidenti** sull'arco. Due archi si dicono **adiacenti** se hanno un vertice in comune.

Def. Un grafo si dice **finito** se gli insiemi V(G) ed E(G) sono finiti.

Def. L'**ordine** di un grafo è il numero dei suoi vertici, cioè la cardinalità dell'insieme dei vertici $|G| = |V(G)|$; si definisce **dimensione** di un grafo il numero dei suoi archi.

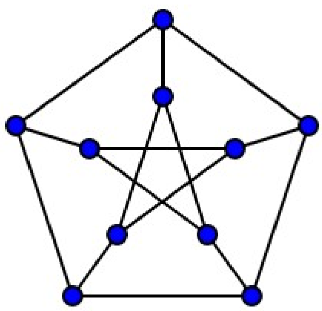
Dato un grafo semplice arbitrario di ordine n, il numero degli archi m varia tra 0 e tutte le combinazioni di n oggetti presi a due a due in modo che i nodi siano mutuamente adiacenti.Quindi: $0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$ perciò un grafo di ordine 6 potrà avere dimensione compresa tra 0 e 15.

Def. Un grafo **completo** è un grafo semplice in cui ogni coppia di vertici è adiacente, in n vertici s'indica K_n.

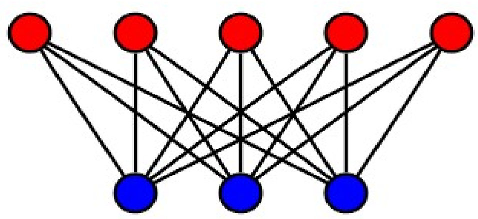

K_3 K_4 K_5

Def. Si definisce **grado di un nodo** d(v) il numero di lati adiacenti ad esso. Il cappio è contato due volte. Un vertice è **isolato** se ha grado zero. Dato un grafo G, si usa indicare il suo **grado minimo** con δ(G), il suo **grado massimo** con Δ(G) e il suo **grado medio** $d(G) = \frac{1}{n}\sum d_G(v)$. Si osserva facilmente che $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.

Def. Il grafo G si dice **k-regolare** o regolare per un certo k se e solo se δ(G)=Δ(G)=k, per esempio se k = 3 si ha un grafo 3-regolare detto anche cubico.



Def. Un grafo G si dice **bipartito** se l'insieme dei suoi nodi V(G) è l'unione di due insiemi indipendenti disgiunti $V=V_1 \cup V_2$ chiamati insiemi partizioni ed ogni suo arco ha un'estremità in V_1 e una in V_2. Se G è semplice e ogni vertice di V_1 è adiacente ad ogni vertice di V_2 allora esso è detto **bipartito completo** e viene denotato con $K_{n,m}$ se $|V_1| = n$ e $|V_2| = m$.



Def. Un **cammino** è un grafo semplice i cui vertici possono essere ordinati in una sequenza lineare in modo che due vertici sono adiacenti se e solo se sono uno consecutivo all’altro. Inoltre, se indichiamo con d_i la lunghezza associata ad ogni arco, allora la **lunghezza del cammino** è la somma delle lunghezze degli archi del cammino.

Def. Un **ciclo** è un cammino con ugual numero di vertici ed archi, con i terminali coincidenti.

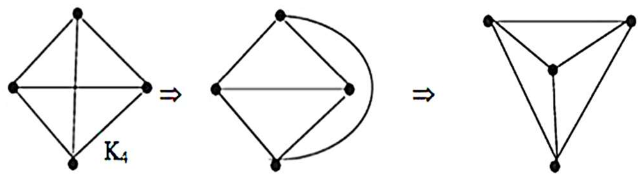
Def. I cammini e i cicli fanno parte dei sottografi di G perché il sottografo G’= (V, E’) è così definito se V’ c V ed E’c E.

Def. Un **cammino Euleriano** è un cammino che contiene ogni arco di G esattamente una volta. Analogamente si chiamerà **cammino Hamiltoniano** se esso percorre ogni vertice esattamente una volta sola.

Prop. Il grafo G è Euleriano, cioè contiene un cammino Euleriano, se e solo se è connesso con vertici tutti di grado pari.

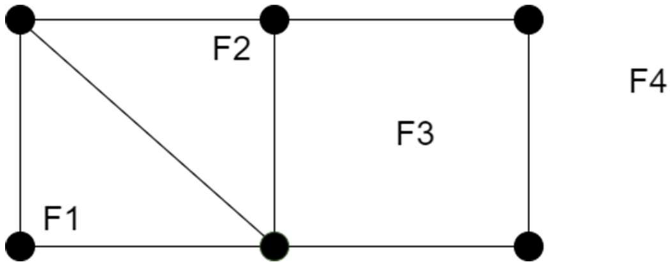
Def. Un grafo G è **connesso** se ogni coppia di suoi vertici appartiene ad un cammino e **sconnesso** altrimenti.

Def. Un grafo è **planare** se può essere rappresentato su un piano in modo che i lati s’incontrano solo nei punti che sono vertici.



Def. La rappresentazione di un grafo planare è detta anche embedding planare (incorporamento). Le **facce** F_i di un grafo planare sono le regioni massimali del piano che contengono punti del piano che non sono interessati dall’embedding planare.

Quindi un grafo planare partiziona il piano in un numero di regioni mutuamente disgiunte che sono quelle racchiuse all’interno delle poligonali dell’embedding, più la faccia esterna che è quella illimitata costituita dalla parte restante di piano. Tali regioni sono insiemi aperti con frontiera gli archi di G.



Def. La lunghezza $l(F_i)$ di una faccia F_i in un grafo G planare è uguale alla somma degli archi frontiera della faccia.

Prop. La somma di tutte le lunghezze delle facce di un grafo è uguale al doppio del numero degli archi $\sum l(F_i) = 2m(G)$.

TEOREMA (Eulero, 1758): Se un grafo piano connesso ha n vertici, m archi e f facce, allora vale

$$n-m+f=2$$

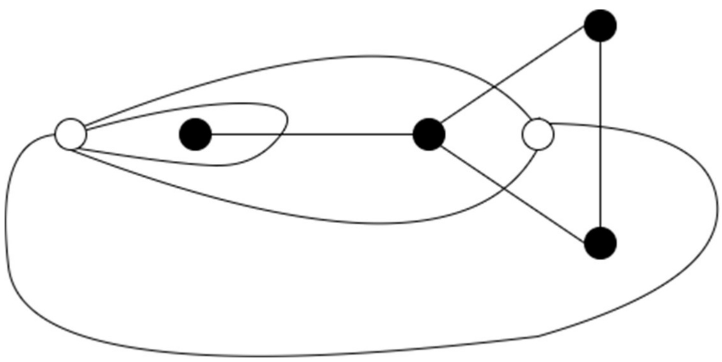
DIM: Dimostriamo per induzione. Per n=1, se m=0 allora la formula vale 1-0+1=2 e questa vale per qualunque arco in più si aggiunga perché esso sarebbe un loop quindi aggiungerebbe archi in più ma anche facce in più che si elidono nella formula.

Per ipotesi induttiva affermiamo valido il teorema per m-1, cioè contraendo un arco da G anche i vertici diventano n-1, per ogni G connesso che rimanga tale con lo stesso numero di facce. Allora

$$(n-1)-(m-1)+f=2 = n-m+f \qquad \text{cdd}$$

Da ogni grafo planare G è possibile costruire un grafo planare duale G* ad esso legato.

Def. Il grafo **duale** G* (V*, E*) di un grafo piano G (V, E) è un grafo piano che ha vertici corrispondenti con le facce di G, mentre i suoi archi si costruiscono tenendo presente che se in G l'arco (u, v) individua le facce X, da un lato, e Y, dall'altro, allora i vertici dell'arco duale sono x e y che rappresentano le facce X e Y. Quindi il numero degli archi in G è uguale al numero degli archi in G*.



Def. Se in un grafo D gli archi sono orientati e quindi l'arco uv è diverso da vu, allora il grafo si dice **orientato** o digrafo. Gli archi, quindi, sono coppie ordinate a → (u, v) con u coda e v testa.

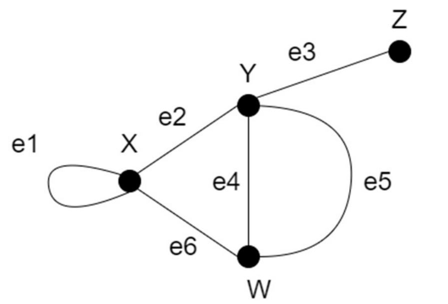
Il nodo dove sono solo archi uscenti è detto sorgente, mentre un nodo dove gli archi sono tutti entranti si chiama pozzo.

Sarà **grado entrante** $d_D^-(v)$ è il numero di archi che hanno v come testa e **grado uscente** $d_D^+(v)$ è il numero di archi che hanno v come coda.

1.2 RAPPRESENTAZIONI

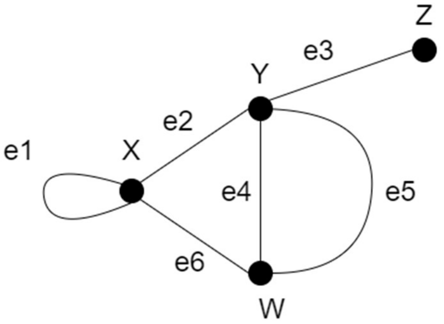
Le rappresentazioni che considererò sono la **matrice d'incidenza** e la **matrice di adiacenza**.

Dato G=G (V, E) con numero di nodi uguale a n e numero di archi uguale m, allora la matrice d'incidenza M ha dimensioni nxm perché contiene una riga per ogni nodo e una colonna per ogni arco. La colonna corrispondente all'arco (i,j) avrà soltanto due elementi diversi da zero in corrispondenza dei nodi i e j, mentre se c'è un loop nel nodo i allora nella colonna corrispondente al suo arco comparirà solo un numero diverso da zero precisamente in corrispondenza di i; per questo la matrice d'incidenza ha una struttura tipica per cui solo 2m componenti delle nxm sono diverse da zero. E da notare che la somma degli elementi in una riga eguaglia il grado del nodo corrispondente.



$$M = \begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \\ W \end{array} \begin{array}{cccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

La rappresentazione attraverso la matrice di adiacenza di un grafo G di n nodi e m archi avviene attraverso la matrice A di dimensione nxn dove ogni riga ed ogni colonna corrispondono ai nodi e gli elementi a_{ij} sono 0 se non esiste l'arco (i, j) corrispondente oppure sono uguali alla somma del numero degli archi che uniscono (i, j). Questa risulta sempre simmetrica ed ha n^2 elementi. Analizzando la matrice A, si può contare il numero di archi incidenti sul nodo i semplicemente sommando gli elementi della riga i-esima. Analogamente, il numero di archi incidenti su un nodo j si ottiene sommando gli elementi della colonna j-esima. Da questo ne consegue che la somma di tutti gli elementi diversi da zero della matrice di adiacenza è uguale a 2m.



$$A = \begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X & Y & Z & W \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

È possibile ricavare G sia da M e sia da A perché in entrambe ci sono tutte le informazioni necessarie, ma la matrice d'incidenza è chiaramente non efficiente a causa dello spazio necessario per la sua memorizzazione su un elaboratore.

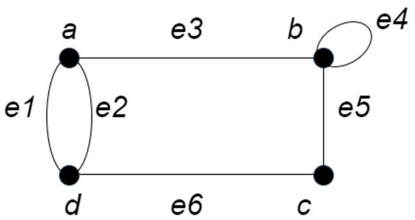
1.3 ISOMORFISMI

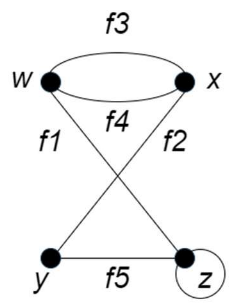
Se esistono due rappresentazioni matriciali di un grafo G tali per cui siano rispettate le relazioni di adiacenza per ogni nodo allora essi si dicono isomorfi.

Def. Due grafi G= (V, E) e G'= (V', E') si dicono **isomorfi**, e si scrive G≅G', se esiste una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi di vertici, cioè se esiste una biiezione

θ: V→V' e Φ: E→E' tale che per ogni xy∈E ↔ $\theta(x)\Phi(y)$ ∈E'
In altre parole x e y sono adiacenti in G se e solo se $\theta(x)$ e $\Phi(y)$ sono adiacenti in G'. Se (θ, Φ) è un isomorfismo tra due grafi semplici, allora la biiezione Φ è completamente determinata da θ.

Condizioni necessari per l'isomorfismo: se due grafi sono isomorfi allora hanno stesso ordine e dimensione e l'immagine di un vertice in G deve avere in G' lo stesso grado.





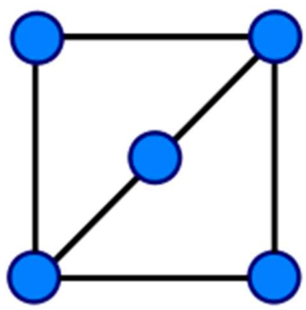
$$\boldsymbol{\theta} = \left| \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ w & z & y & x \end{array} \right| \qquad \boldsymbol{\Phi} = \left| \begin{array}{cccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 \\ f3 & f4 & f1 & f6 & f5 & f2 \end{array} \right|$$

PROP. La relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza, cioè è una relazione riflessiva ($G \cong G$), una relazione simmetrica ($G \cong G' \leftrightarrow G' \cong G$) e transitiva ($G \cong H, H \cong G' \rightarrow G \cong G'$).

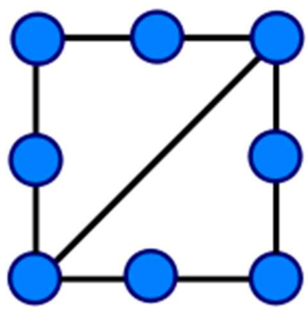
Def. Un **automorfismo** è un isomorfismo con sé stesso; cioè dato un grafo semplice un suo automorfismo è una permutazione dei nodi che preserva gli archi e non archi.

Def. Due grafi G e H si dicono **omeomorfi** se e solo se esiste un isomorfismo tra due loro suddivisioni di lati G' e H'. Analogamente si possono definire omeomorfi due grafi se e solo se possono essere ottenuti da uno stesso grafo mediante due sequenze (finite) di suddivisioni elementari di lati. Per suddivisione elementare di lati o spigoli di un grafo s'intende un'operazione che modifica un suo lato {u,v} in due lati {u,w} e {w,v} incidenti in un nuovo vertice w. Questa operazione si può descrivere anche come inserimento di un nuovo nodo in un lato.

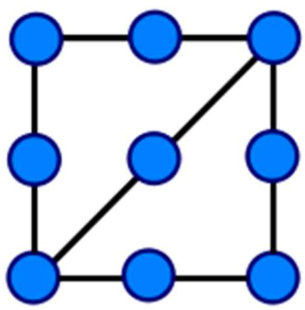
G



H



G' H'



CAPITOLO 2

2.1 LEMMA DI HANDSHAKING

Nel 1736 Leonhard Euler nel suo famoso articolo sui sette ponti di Konigsberg, iniziò lo studio della teoria dei grafi dimostrando la formula della somma dei gradi detta anche lemma di handshaking (strette di mano).

LEMMA DI HANDSHAKING

La somma dei gradi di ogni vertice è uguale al doppio del numero degli archi

$$\sum d(v) = 2m$$

DIM: Sommando i gradi di ogni vertice, ogni arco è contato due volte (una volta per ogni vertice)

Inoltre, considerando la matrice d'incidenza M, la somma delle voci nella riga del vertice v corrisponde al suo grado ed è precisamente d(v), perciò $\sum d(v)$ è proprio la somma di tutte le righe in M. Ma questa somma è anche 2m poiché in ciascuna delle m colonne di M la somma è 2.

COROLLARIO 2.1 In ogni grafo, il numero dei vertici di ordine dispari è pari

DIM: Siano V_1 e V_2 gli insiemi dei vertici di ordine dispari e di ordine pari in G rispettivamente. Allora

$\sum_{V1} d(v) + \sum_{V2} d(v) = \sum_V d(v)$ che è pari (dal teorema precedente). Siccome anche $\sum_{V2} d(v)$ è pari per come abbiamo definito V_2 allora anche $\sum_{V1} d(v)$ deve essere pari. Perciò la cardinalità di V_1 è pari.

2.2 LEMMA DI SPERNER

Un'immediata conseguenza di questo corollario è il lemma di Sperner (1928) che trova importanti applicazioni in topologia, in particolare permette la dimostrazione del teorema del punto fisso di Brouwer.

LEMMA DI SPERNER

Questo lemma riguarda la decomposizione di un **simplex** che è un grafo completo nel caso unidimensionale è il segmento, nel caso bidimensionale è il triangolo e nel caso tridimensionale è il tetraedro. Un n-simplex è un ipertetraedro n-dimensionale. Esso viene suddiviso in altri simplex più piccoli.

Per semplicità esporrò i primi due casi.

CASO UNIDIMENSIONALE:

Si consideri il grafo completo di un segmento applicando un'etichettatura o colorazione diversa ai due vertici (1 e 2), poi aggiungiamo altri nodi etichettati casualmente con i due colori iniziali, in modo da suddividerlo in altri segmenti. In questa situazione il lemma di Sperner stabilisce che:

TEOREMA: se i vertici estremi del grafo hanno colori differenti allora il numero totale di segmenti completi dei due colori è un numero dispari.

DIM. La dimostrazione segue il principio di induzione che in sintesi è il seguente:

1. Si dimostra per il caso base
2. Si suppone vero per il caso n
3. Si dimostra per n+1

1. Il numero minimo del grafo è due e in questo caso c'è un solo segmento completo con i suoi vertici etichettati con i due colori, quindi verificato caso base.
2. Supponiamo vero per una suddivisione con n nodi, cioè c'è un numero dispari di segmento completi dei due colori. Nel caso del disegno riportato ci sono 5 segmenti completi delle due colorazioni.
3. Ora per il caso n+1, aggiungiamo un nodo nella suddivisione del segmento iniziale e analizziamo le diverse possibilità d'inserimento:
   - Aggiungiamo un nodo di colore 1 tra due di colore 1, allora il numero di segmenti completi non cambia (rimane dispari)
   - Aggiungiamo un vertice di colore 2 tra due di colore 2, come prima il numero dei segmenti completi non cambia (rimane dispari)

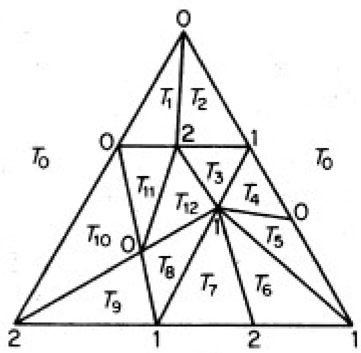
- Aggiungiamo un nodo 1 tra due di colore 2 e viceversa (un nodo 2 tra due nodi di colore 1) in questo caso si creano altri due segmenti completi che aggiunti a quelli iniziali mantengono il totale ad un numero dispari
- Aggiungiamo un vertice di colore 1 o 2 tra due nodi di colore diverso, così facendo si elimina un segmento completo e si creano due segmenti di cui un solo completo. Quindi anche in questo caso il numero totale rimane dispari.
- In conclusione, con tutti i casi possibili di n+1 il numero dei segmenti rimane dispari. Così si conclude la dimostrazione per induzione. Cdd

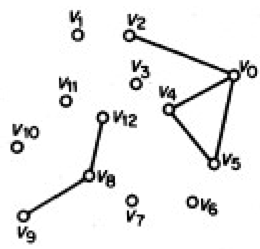
CASO BIDIMENSIONALE

Sia T il grafo completo con 3 nodi rappresentato da un triangolo piano. Si dice suddivisione **simplicial** se T viene decomposto in un numero finito di triangoli più piccoli in modo che due triangoli adiacenti hanno un vertice o un lato in comune. L'etichettatura sarà:

i. I tre vertici di T saranno etichettati con i tre colori diversi 0, 1 e 2.
ii. Ciascun vertice di ogni lato che unisce una coppia di colori è etichettato con i soli due colori degli estremi del lato stesso.

TEOREMA: Ogni suddivisione simplicial correttamente colorata di un triangolo ha un numero dispari di sottotriangoli con i vertici completi dei tre colori.





DIM: Sia T_0 la regione al di fuori di T e siano T_1, T_2, …T_i i triangoli della suddivisione. Costruiamo un grafo duale sull'insieme dei vertici v_0, v_1, v_2, ….v_i unendo v_i con v_j ogni volta che sia presente in T il lato comune con i colori 0 e 1. In questo nuovo grafo il nodo v_0 è chiaramente di grado dispari perché è conseguenza del caso unidimensionale dimostrato precedentemente applicato al lato con estremi 0 e 1. Osserviamo che, oltre v_0, gli altri nodi non potranno mai avere grado 3 perché è impossibile una suddivisione corretta con triangoli che abbiano tre lati colorati con 0 e 1. Quindi i nodi v_1, v_2, …v_i

possono avere grado 0 oppure grado 1 oppure grado 2. Notiamo che tra quest'ultimi, quelli che hanno grado 1 sono proprio relativi ai triangoli completi dei tre colori.

Dal corollario del lemma handshaking si afferma che in un grafo il numero dei vertici con grado dispari è pari, quindi siccome v_0 è già uno di questi, allora i vertici interni a T devono essere necessariamente in numero dispari. Cdd

In conclusione, per Sperner sotto le ipotese suddette esiste almeno un triangolo completo.

Ora indicheremo brevemente come il lemma di Sperner può esser utilizzato per dedurre il teorema del punto fisso di Brouwer che enuncia:

TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI BROUWER: Ogni funzione continua (mappa) da un n-disco chiuso a sé stesso, ha un punto fisso che è un punto x tale che f(x)=x.

In parole semplici, supponiamo di prendere una carta geografica e di stenderla al suolo della nostra città, esisterà sicuramente un punto della cartina che è esattamente sovrapposto al punto reale che esso rappresenta sulla mappa.

Per prima cosa possiamo affermare che un 2-disco chiuso è omeomorfo ad un triangolo chiuso, così abbiamo la garanzia di poter usare il lemma di Sperner per dimostrare che una mappatura continua da un triangolo chiuso a sé stesso, ha un punto fisso.

Sia T un dato triangolo chiuso con vertici x_0, x_1, x_2. Ogni punto di T può essere scritto in modo univoco come $x=a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2$, dove ogni $a_i \geq 0$ e $\sum a_i =1$; i numeri reali a_i sono chiamati coordinate baricentriche di x.

Ora sia f una funzione continua in T a sé stesso (f: T→ T) e supponiamo che

$$f (a_0, a_1, a_2) = (a'_0 , a'_1 , a'_2)$$

Definiamo S_i l'insieme dei punti (a_0 , a_1 , a_2) in T per i quali $a'_i \leq a_i$, per avere una corretta triangolazione e mostrare che f ha un punto fisso bisogna gli S_i abbiano un intersezione non vuota, cioè $S_0 \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$

Supponiamo che (a_0 , a_1 , a_2) ∈ $S_0 \cap S_1 \cap S_2$. Per la definizione di S_i , abbiamo che $a'_i \leq a_i$ per ogni i e questo unito al fatto che $\sum a'_i = \sum a_i = 1$ dà come risultato

$$(a'_0 , a'_1 , a'_2) = (a_0, a_1, a_2)$$

In altre parole, (a_0, a_1, a_2) è un punto fisso di f.

Così consideriamo un'arbitraria suddivisione T e una corretta colorazione tale che ogni vertice etichettato i appartenga a S_i; S_0 ha (a_0, a_1, a_2) con $a'_0 \leq a_0$ quindi colorato con lo zero, S_1 ha (a_0, a_1, a_2) con $a'_1 \leq a_1$ quindi colorato con il numero uno infine S_2 ha (a_0, a_1, a_2) con $a'_2 \leq a_2$ quindi colorato con il due. Ne consegue dal Lemma di Sperner che c'è almeno un triangolo nella suddivisione in cui i tre vertici appartengono a S_0,

S_1, S_2 e questo vale per qualsiasi suddivisione di T. Poiché è possibile sceglier suddivisioni in cui ciascuno dei triangoli più piccoli ha un diametro arbitrariamente piccolo, concludiamo che esistono tre punti S_0 S_1 e S_2 che sono arbitrariamente vicini l'uno all'altro; poiché gli insiemi S_I sono chiusi si può dedurre che cioè $S_0 \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$

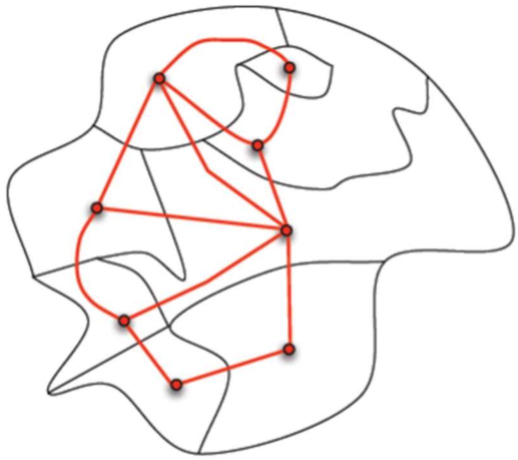
Cdd

Questo potente teorema ha un ampio utilizzo nella moderna matematica attuale. Per esempio, può dimostrare l'esistenza di equilibri in economia. Ciò che è noto in economia è che il prezzo dei beni varia al variare della domanda e dell'offerta; esiste almeno una selezione di prezzi che bilancia la domanda e l'offerta, cioè almeno un punto di equilibrio dove i prezzi sono stabili e tutti i negoziatori non sono portati né a cedere né ad acquistare alcun bene, perché nessun prezzo diventa più conveniente. Un tale punto di equilibrio è un punto fisso di un'opportuna funzione che ci dice come la domanda influenza il cambiamento dei prezzi.

Inoltre, il teorema del punto di Brouwer, come altri teoremi del punto fisso dimostrano l'esistenza di un punto di equilibrio in un gioco. Supponiamo che in un gioco con n partecipanti, ciascuno possa attuare ad ogni turno una particolare strategia di gioco, con lo scopo di ottenere il massimo guadagno. L'equilibrio corrisponde alla situazione in cui tutti i giocatori raggiungono il miglior risultato possibile. Definendo un'opportuna F funzione delle strategie adottate dai giocatori arriviamo a dimostrare che un punto fisso di una tale F corrisponde al punto di equilibrio di Nash, ossia ad una particolare combinazione di strategie che porta tutti i giocatori a massimizzare il proprio guadagno.

2.3 TEOREMA DEI CINQUE COLORI

Ricordando l'utilizzo della colorazione dei vertici nel lemma di Sperner, possiamo affermare che il problema della colorazione è di natura topologica perché si può associare una cartina geografica ad un grafo. Per fare ciò si sceglie un vertice all'interno di ogni regione e colleghiamo due vertici con un lato se le regioni a cui appartengono sono confinanti, disegnandolo tutto all'interno delle due regioni confinanti. Il grafo ottenuto è un grafo planare e connesso.



Ora ci si chiede: quanti colori servono per colorare i vertici di un grafo planare connesso in maniera tale che due vertici colorati non abbiano lo stesso colore? Nel 1890 P. J. Heawood congetturò che bastassero quattro colori, ma tale congettura è stata dimostrata solo nel 1976 da K. Appel e W. Haken; la loro dimostrazione si basa sull'analisi di 1476 configurazioni per le quali la validità del teorema viene verificata caso per caso grazie ad un complesso algoritmo informatico. Cercherò di illustrare il teorema dei cinque colori che lo stesso Heawood pubblicò alla fine dell'800 con grande successo e semplificherò l'esposizione della dimostrazione mantenendo la sua efficacia. La dimostrazione del teorema dei cinque colori si basa sul seguente lemma.

LEMMA: In ogni grafo planare connesso c'è almeno un vertice che è collegato con al più 5 vertici.

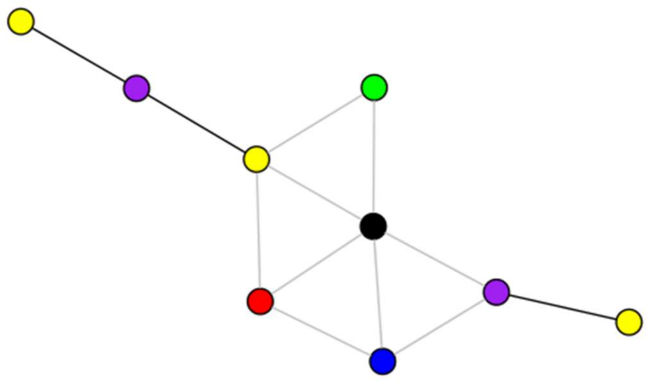
DIM: Dato il grafo G, aggiungiamo lati in modo che ogni faccia sia delimitata da tre lati. (se lo dimostriamo per quest'ultimo che ha più lati a maggior ragione varrà anche per quello originale) Poiché ogni regione ha almeno 3 lati e ogni lato è in comune a due regioni, allora possiamo scrivere $3*(\#\ Facce) \leq 2*(\#Lati)$ quindi $F\leq 2/3L$ se questo lo sostituisco nella relazione di Eulero $V-L+F=2$, avremo $V-L+2/3L\geq 2$ cioè $L\leq 3V-6$. Ora ricordando la definizione di grado minimo di un grafo, esso sarà $\delta(G)\leq d(v)$ e moltiplicando per il numero di vertici avremo

$\delta(G)*n\leq\sum d(v)=2m\leq 2(3n-6)<6n$ quindi $\delta(G)<6$ e questo vuol dire che almeno un vertice ha al più grado 5. cdd

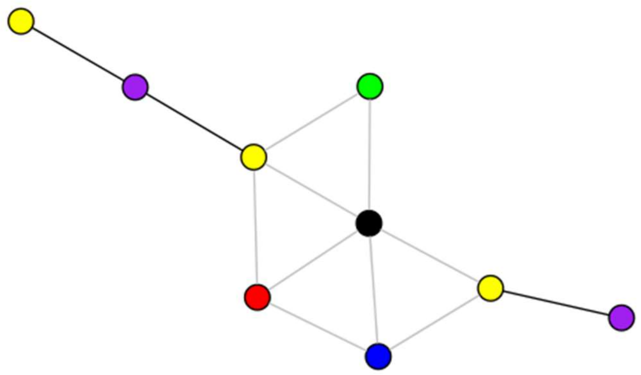
Per questo ci si concentrerà proprio su quel vertice con grado uguale a cinque, considerando il fatto che se un vertice avesse grado 4 allora sarebbe semplice colorare il grafo con 5 colori.

Il caso difficile è quando il vertice sul quale abbiamo posto l'attenzione è effettivamente collegato con cinque altri vertici, e abbiamo già usato tutti i cinque colori disponibili.

Scegliamo due colori, per esempio il giallo e il viola, e consideriamo solo i nodi colorati con quei colori, e solo gli spigoli che connettono quei nodi. Può succedere, come in questa figura, che il sottografo contenente solo i due colori sia formato da due o più componenti connesse, separate tra di loro. Ecco qua:

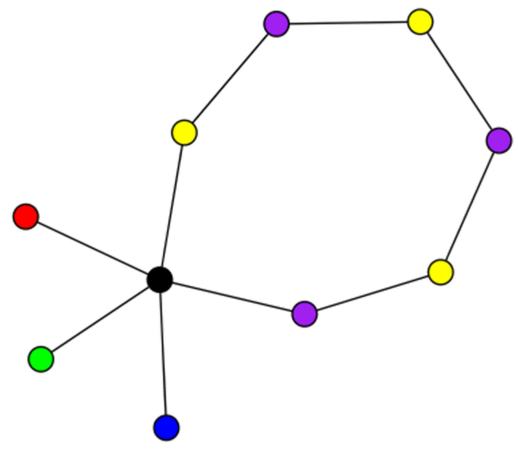


Se le cose stanno così, è facile colorare il grafo con cinque colori: basta invertire i colori di una delle due componenti connesse, e si riesce a liberare un colore da assegnare al vertice nero. Per esempio, se invertiamo i colori della componente in alto, otteniamo questa figura:



Abbiamo liberato il colore viola, che possiamo assegnare al vertice nero, ed ecco fatto.

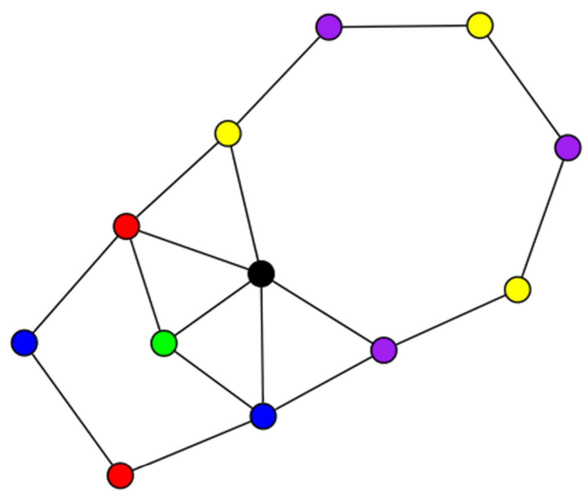
E se il sottografo che contiene i due colori che abbiamo scelto fosse composto da un'unica componente connessa il grafo diventerebbe così:



Se le cose fossero così, dovremmo scegliere altri due colori e ripetere il ragionamento fatto sopra. Ma siamo sicuri di trovare una coppia di colori che forma almeno due sottografi sconnessi, come prima? Potrebbe verificarsi il caso in cui ogni coppia di colori che noi scegliamo genera un sottografo avente un'unica componente connessa? La risposta è no.

Il fatto è che non è possibile che, *comunque noi scegliamo due colori*, il sottografo che li contiene sia composto da un'unica componente connessa.

Posso immaginare che blu e rosso siano collegati tra loro da un unico cammino bicolorato, ma questo dovrà contenere il nodo verde, oppure tutti gli altri. Se contiene il verde, per esempio, può succedere una cosa del genere:



A questo punto un cammino verde-giallo non potrebbe più essere connesso, perché il verde è all'interno del circuito rosso-blu, mentre il giallo è all'esterno.

Quindi, anche in questo caso si riesce a colorare il vertice nero con uno dei cinque colori, per esempio con il giallo.

In conclusione, le carte geografiche si possono colorare tutte utilizzando cinque colori al massimo.

Per dimostrare che di colori ne servono quattro servono un computer, tanto tempo a disposizione, e una predisposizione filosofica a fidarsi dell'operato di un programma.

CAPITOLO TERZO

3.1 IL PROBLEMA DEL CAMMINO MINIMO

Nella teoria dei grafi uno dei principali argomenti è lo studio delle reti di flusso in particolare la ricerca di un cammino minimo. Questo tipo di studio trova applicazioni in molteplici contesti, per esempio, per l'ottimizzazione nella realizzazione di reti idriche, di telecomunicazioni, stradali o per le reti ferroviarie ecc.

Consideriamo un grafo orientato G= (V, E) al quale associamo ad ogni arco $(i, j) \in E$ una lunghezza o peso w(e). Il grafo ha un nodo particolare che si chiama **sorgente.** Definiamo la lunghezza di un cammino orientato nel grafo come la somma delle lunghezze degli archi nel cammino. Il problema del cammino minimo in un grafo (shortest path problem) consiste nel determinare i cammini di lunghezza minima dalla sorgente u_0 verso ogni altro nodo v_0 in V, come trovare l'itinerario più breve tra due specifiche città in una rete. I pesi, che rappresentano le distanze d(u, v), naturalmente sono non negativi. Assumiamo che il grafo G sia semplice, cioè senza cappi o archi multipli, e che il peso w dell'arco uv è infinito se non appartiene all'insieme degli archi E.

Nello studio del cammino minimo dobbiamo fare alcune assunzioni:

1. Il grafo contiene un cammino orientato dalla sorgente s verso qualunque altro nodo nel grafo.
2. Il grafo non contiene cicli di lunghezza negativa.

Indichiamo con d(i) la distanza del nodo $i \in V$ da u_0, vale la seguente proprietà:

PROP. Un cammino diretto P dalla sorgente u_0 al nodo v_0 è un cammino di lunghezza minima se e solo se $d(j) = d(i) + w_{ij}$, $\forall\ (i,j) \in P$.

DIM: CS. Se il cammino dalla sorgente u_0 al nodo v_0 del grafo ($u_0 = n_1, n_2, \ldots, n_k = v_0$) è minimo allora possiamo dire che esiste un sottocammino ($u_0 = n_1, n_2, \ldots, n_p = p$) per ogni p=2, 3,…, k-1 che è il cammino minimo dalla sorgente u_0 al nodo p quindi ne segue che $d(j) = d(i) + w_{ij}$, $\forall\ (i,j) \in P$.

CN. Per ipotesi abbiamo che $d(j) – d(i) = w_{ij}$ e supponiamo che $u_0 = n_1, n_2, \ldots, n_k = v_0$ sia la successione di nodi nel cammino P, allora prendendo la distanza $d(v_0)$, aggiungendo e togliendo la distanza di ogni nodo in P otteniamo

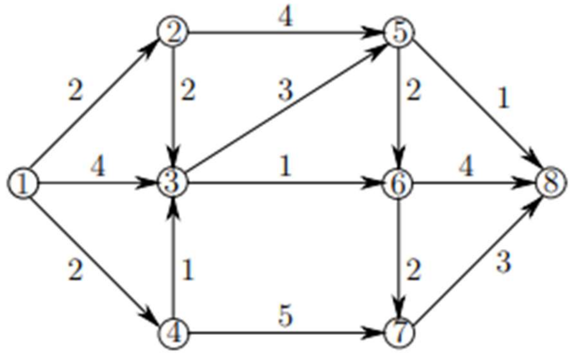
$d(v_0) = d(n_k) = (d(n_k) - d(n_{k-1})) + \ldots + (d(n_2) - d(n_1))$ considerando $d(n_1)=d(u_0)=0$ e $d(j) – d(i) = w_{ij}$

abbiamo che $d(k) = \sum w_{ij} \quad \forall\ (i,j) \in P$.

Di conseguenza, P è un cammino diretto dalla sorgente al nodo v_0 di lunghezza d(k) e dato che per definizione d(k) è la distanza del cammino minimo del nodo v_0, allora P deve essere il cammino minimo del nodo v_0.

Uno degli algoritmi in grado di risolvere il problema della ricerca del cammino minimo dalla sorgente a tutti i nodi è l'algoritmo di Dijkstra, un informatico olandese che lo pubblicò nel 1959. L'algoritmo mantiene un'etichetta d(i) ai nodi che rappresentano un limite superiore sulla lunghezza del cammino minimo del nodo i. Ad ogni passo l'algoritmo partiziona i nodi V in due insiemi: l'insieme dei nodi etichettati permanentemente e l'insieme dei nodi che sono ancora etichettati temporaneamente. La distanza dei nodi etichettati permanentemente rappresenta la distanza del cammino minimo dalla sorgente a tali nodi, mentre le etichette temporanee contengono un valore che può essere maggiore o uguale alla lunghezza del cammino minimo.

L'idea di base dell'algoritmo è quella di partire dalla sorgente e cercare di etichettare permanentemente i nodi successori. All'inizio, l'algoritmo pone il valore della distanza della sorgente a zero ed inizializza le altre distanze ad un valore arbitrariamente alto ($d(i) = \infty \quad \forall\ i \in V$) Ad ogni iterazione, l'etichetta del nodo i è il valore della distanza minima lungo un cammino dalla sorgente che contiene, a parte i, solo nodi etichettati permanentemente. L'algoritmo seleziona il nodo la cui etichetta ha il valore più basso tra quelli etichettati temporaneamente, lo etichetta permanentemente ed aggiorna tutte le etichette dei nodi a lui adiacenti. L'algoritmo termina quando tutti i nodi sono stati etichettati permanentemente. Le operazioni che compie l'algoritmo sono fondamentalmente due: un'operazione di selezione del nodo ed un'operazione di aggiornamento delle distanze. La prima seleziona ad ogni passo il nodo con il valore dell'etichetta più basso, l'altra verifica la condizione $d(j) = d(i) + w_{ij}$ e, in caso positivo, aggiorna il valore dell'etichetta ponendo $d(j) = d(i) + w_{ij}$.



```
  Algorithm DIJKSTRA;

begin
 S = ∅;
 S' = V;
 ∀ i ∈ V, d(i) = ∞ ;
 d(s) = 0 ;
 pred(s) = 0 ;
 while |S| < n do
 begin
     sia i ∈ S un nodo per cui d(i) = min { d(j) : j ∈ S' } ;
     S = S ∪ { i } ;
     S' = S' – { i } ;
     for ∀ ( i, j ) ∈ A ( i ) do
         if d(j) > d(i) + wij then
         begin
             d(j) = d(i) + wij ;
             pred(j) = i
         end
   end
end
```

Per quanto riguarda la complessità computazionale consideriamo le due operazioni base che l'algoritmo esegue. L'operazione di selezione dei nodi viene eseguita n volte e ad ogni passo scandisce ogni nodo etichettato temporaneamente, quindi esegue tipo una grandezza dell'ordine di $n*n \sim n^2$ iterazioni.

3.2 IL PROBLEMA DEL COMMESSO VIAGGIATORE

Uno dei problemi più noti nella teoria dei grafi e dell'informatica che già dal 1736 ha impegnato il grande Leonhard Eulero e che ancora oggi risulta un problema difficile da risolvere è il seguente:

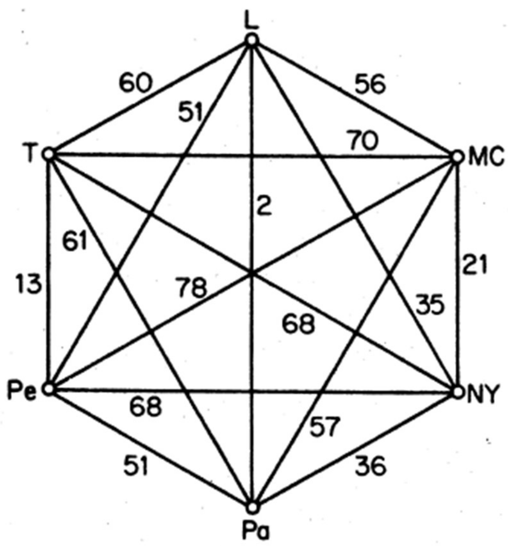
un commesso viaggiatore desidera visitare un numero di città e poi ritornare nel suo punto di partenza. Dati i tempi di percorrenza tra le città, come dovrebbe pianificare il suo itinerario in modo da visitare ogni città esattamente una volta e viaggiare in tutto il più breve tempo possibile? Questo è noto come il problema del commesso viaggiatore. In termini grafici, lo scopo è trovare un ciclo Hamilton di peso minimo in un grafico completo ponderato. Chiameremo tale ciclo un ciclo ottimale. A differenza con il problema del percorso più breve, per questa situazione non è noto alcun algoritmo efficiente per risolvere questo tipo di problema. È quindi auspicabile disporre di un metodo per ottenere una soluzione ragionevolmente buona (ma non necessariamente ottimale). Un possibile approccio consiste nel trovare prima un ciclo di Hamilton C, quindi cercarne un altro di peso minore modificando opportunamente C. Forse la modifica più semplice è la seguente. Sia $C = v_1\, v_2\, v_3 \ldots\, v_v\, v_1$. allora, per tutti i e j tali che $1 < i + 1 < j < v$, possiamo ottenere un nuovo ciclo di Hamilton

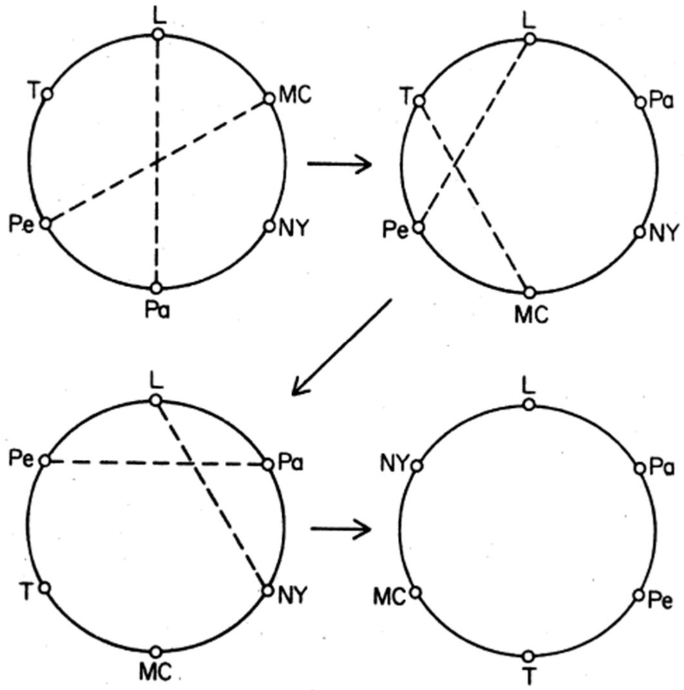
$$C_{ij} = v_1\, v_2\, v_3 .. v_{j-1} .. v_{i+1}\, v_{j+1}\, v_{j+2} \ldots\, v_v\, v_1$$

Cancellando gli archi v_iv_{i+1} e v_jv_{j+1} e aggiungendo gli archi v_iv_j e $v_{i+1}v_{j+1}$ come mostrato in figura

Se per qualche i e j, $w(v_iv_j) + w(v_{i+1}v_{j+1}) < w(v_iv_{i+1}) + w(v_jv_{j+1})$ il ciclo C_{ij} sarà un miglioramento su C.

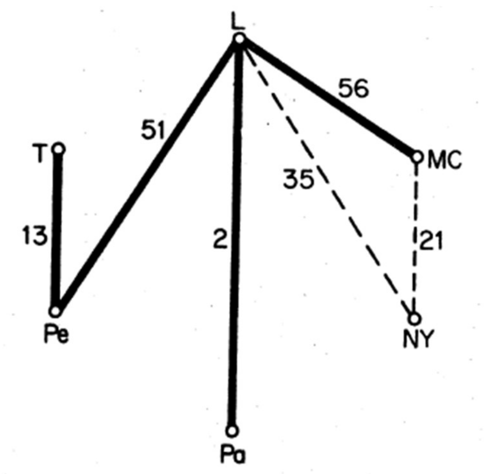
Dopo avere eseguito una sequenza delle suddette modifiche, rimane un ciclo che non può essere più migliorato con questi metodi. Il ciclo finale quasi certamente non sarà ottimale, ma è ragionevole supporre che spesso sarà abbastanza buono; per una maggiore precisione la procedura può essere ripetuta, iniziando ogni volta con un ciclo diverso. Come esempio, si consideri il grafico ponderato mostrato:





Partendo dal ciclo A B C D E F A. possiamo applicare una sequenza di tre modifiche, come illustrato in figura 4.14, e finire con il ciclo A C B F E D A di peso 192.

Un'indicazione di quanto sia buona la soluzione a volte può essere ottenuto applicando l'algoritmo di Kruskal. Supponiamo che C sia un ciclo ottimo in G. Allora, per ogni vertice v, C-v è un cammino di Hamilton in G-v, ed è quindi un albero di copertura di G-v. Ne consegue che se T è un albero ottimo in G-v, e se e e f sono due archi incidenti con v tali che w (e) + w (f) è il più piccolo possibile, allora w(T) + w(e) + w(f) sarà un



limite inferiore su w(C). Nel nostro esempio, prendendo C come vertice v, troviamo che w(T) = 122 w(e) = 21 e w(f) = 35

Possiamo quindi concludere che il peso w (C) di un ciclo ottimo nel grafo dato soddisfa 178≤ w(C) ≤ 192.

CONCLUSIONI

Questo breve approccio alle nozioni base della teoria dei grafi potrebbe essere solo un "assaggio" dell'ampia utilità che questa materia offre; infatti, i grafi sono oggetti discreti che permettono di schematizzare una grande varietà di situazioni e di processi, spesso consentono delle analisi in termini quantitativi e algoritmici. In sintesi, per lo studente ce n'è per tutti i gusti.

Allora, proprio in questo tempo difficile che viviamo, auguro a tutti gli studenti di continuare a tenere vivo il desiderio dell'apprendimento perché come dice Leonardo da Vinci:

"Il piacere più nobile è la gioia della conoscenza".

BIBLIOGRAFIA

J. A. Bondy U. S. R. Murty “*Graph Theory”* Springer.

J. A. Bondy and U. S. R. Murty *“Graph Theory”* North-Holland.

J. B. Orlin R. K. Ahuja, T. L. Magnanti *“Network Flows”* Pearson Education.

SITOGRAFIA

Tesi di Fabrizio Zucca, relatore Prof. Andrea Loi *“Il Teorema del Punto Fisso di Brouwer: una dimostrazione combinatoria”* Corso di Laurea in Matematica, Università degli studi di Cagliari.

Prof.ssa Rossella Rimondi *“I Grafi”* Dipartimento di matematica Alma Mater Studiorum- Università di Bologna.