- CONNESSIONE PER MATROI

SIA $M = M(E, \mathcal{I})$ UNA MATROIDE. DEFINIAMO LA SEGUENTE RELAZIONE $\sim$:
DATI $e, f \in E$ $\quad e \sim f \longleftrightarrow e = f \vee \exists C \in \mathcal{C}(M)$
LE COMPONENTI CONNESSE DI M SONO LE CL

M SI DICE CONNESSA SE $|M/\sim| = 1$.

OSSERVAZIONI:
1) SIA G UN GRAFO SENZA VERTICI ISOLATI, $M(G)$ È CONNESSA SE E SOLO SE G È UN BL
2) OGNI COMPONENTE CONNESSA DI UNA MATR È UN CHIUSO.

PRIMA DI ENUNCIARE E DIMOSTRARE IL PRINCIPALE LEMMA DI QUESTA SEZIONE CI SERVONO DEI RISULTATI PRELIMINARI SULL MATROIDI.

PROPOSIZIONE 1:
SIA M MATROIDE, M^* LA SUA DUALE E r^* LA FUNZIONE RANGO DI M^*, ALLORA

$$r(M) + r^*(M^*) = |E(M)| = |E(M^*)|$$

PROOF:
IMMEDIATA. $\square$

PROPOSIZIONE 2:

DATO $X \subset E$ $\quad r^*(X) = |X| - r(M) + r(E - X)$

PROOF:

SIA I UN INSIEME INDIPENDENTE DI M CO
IN X MASSIMALE, ALLORA $r^*(X) = |I^*$
SIA I UN INSIEME INDIPENDENTE DI M CO
IN E-X MASSIMALE, ALLORA $r(E-X) = |I$
SIA B UN INSIEME INDIPENDENTE DI M C
$I \subset B \subset E - I^*$ MASSIMALE, ALLORA
$r(B) = r(E-I^*) = r(M)$, QUINDI B È
DI M E $B^* = E - B$ È BASE DI M^*.
$B \subset E - I^* \longrightarrow I^* \subset B^*$ E PER LA SCELTA I
ABBIAMO $B^* \cap X = I^*$; $I \subset B$ E PER
SCELTA DI I ABBIAMO $B \cap (E-X) =$
A QUESTO PUNTO

$$|B \cap (E-X)| = |B \cap E| - |B \cap X| = |I|$$

QUINDI $|B \cap X| = |B| - |I|$ E INFINE
$|X| = |X \cap B| + |X \cap B^*| = |B| - |I| + |I^*| =$
$= r(M) - r(E-X) + r^*(X)$ DA CUI

$$r^*(X) = |X| - r(M) + r(E-X) \qquad \square$$

PROPOSIZIONE 3:

X È IPERPIANO DI M SE E SOLO SE E-
COCIRCUITO DI M.

PROOF:

$(\leftarrow)$

SIA C^* COCIRCUITO DI M, ALLORA,
RICORDANDO CHE $(M^*)^* = M$, ABBIA

$$r(E-C^*) = |E-C^*| - r^*(M^*) + r^*(C^*) =$$
$$= |E| - |C^*| - (|E| - r(M)) + |C^*| - 1 =$$
$$= r(M) - 1$$

DAL MOMENTO CHE C^* È INSIEME MI[NIMALE] TALE CHE $r^*(C^*) = |C^*| - 1$, $E - C^*$ È INSIEME MASSIMALE TALE CHE $r(E-C^*) = r(M) - 1$ ED È QUINDI [UN] IPERPIANO.

$(\longrightarrow)$

IL RAGIONAMENTO È ANALOGO:

$$r^*(E-X) = |E-X| - r(M) + r(X) =$$

$$= |E-X| - r(M) + r(M) - 1 = |E-X|$$

DAL MOMENTO CHE X È INSIEME MASSIMALE TALE CHE $r(X) = r(M) - 1$, È INSIEME MINIMALE TALE CHE $r^*(E-X) = |E-X| - 1$ ED È QUINDI COCIRCUITO.

COROLLARIO:

X È UN IPERPIANO DI $M(G)$ SE E SO[LO] SE $E - X$ È UN TAGLIO MINIMALE

PROOF:

BASTA UTILIZZARE IL FATTO CHE

$$M(G)^* = M^*(G)$$

LEMMA 1:

SIA G UN BLOCCO 3-CONNESSO, E SIA H -
ESISTA UN ISOMORFISMO $\theta: M(G) \longrightarrow M(H)$.
ALLORA θ INDUCE UN ISOMORFISMO $\theta: G$ —

PROOF:

CLAIM 1:

SIA G CONNESSO SENZA LOOPS E SIA X U
DI $M(G)$, SE $M(X)$ È CONNESSA ALLORA
IL TAGLIO DI UN VERTICE DI G.

PROOF:

SE $E-X$ NON È IL TAGLIO DI UN VERTICE,
ESSENDO UN TAGLIO MINIMALE, X È UN S
SCONNESSO QUINDI $M(X)$ NON PUÒ ESSER

COME COROLLARIO IMMEDIATO ABBIAMO I

CLAIM 2:

DATA UNA MATROIDE $M = M(G)$ CON G CO
LOOPS, SE M POSSIEDE ESATTAMENTE $|V($
CONNESSI ALLORA M DETERMINA LA MATRI
INCIDENZA DI G E QUINDI DETERMINA UN

SE G È 3-CONNESSO ALLORA $G-v$ È
$\forall v \in V(G)$, E PER IL CLAIM 1 $M(G-v)$
IPERPIANO CONNESSO DI $M(G)$; QUINDI
HA ESATTAMENTE $|V(G)|$ IPERPIANI CONN
ADESSO $M(G) \simeq M(H)$, $M(H)$ È CONNESS
H È UN BLOCCO, IN PARTICOLARE H È C

ABBIAMO

$$|V(G)|-1 = r(M(G)) = r(M(H)) =$$

DA CUI $|V(G)| = |V(H)|$.

DAL MOMENTO CHE X È UN IPERPIANO DI $M(G)$ SE E SOLO SE $\theta(X)$ È UN CONNESSO DI $M(H)$, $M(H)$ HA ESATTAM $|V(G)| = |V(H)|$ IPERPIANI CONNESSI E APPLICARE IL CLAIM 2 A $M(H)$ PER CHE $G \simeq H$.

L'ISOMORFISMO È LA MAPPA

$$\begin{aligned} \theta : V(G) &\longrightarrow V(H) \\ v &\longmapsto \theta(v) \end{aligned}$$

TALE CHE, CHIAMATO X_v L'UNICO IPE PER CUI $\partial_G(v) = E(G) - X_v$, SI ABBIA

$$\theta(X_v) = X_{\theta(v)} \quad \forall v \in V($$

DOVE $X_{\theta(v)}$ È L'UNICO IPERPIANO DI PER CUI $\partial_H(\theta(v)) = E(H) - X_{\theta(v)}$.

ADESSO

$$e \in \partial_G(v) \longleftrightarrow e \notin X_v \longleftrightarrow \theta(e) \notin X_{\theta(v)} \longleftrightarrow$$

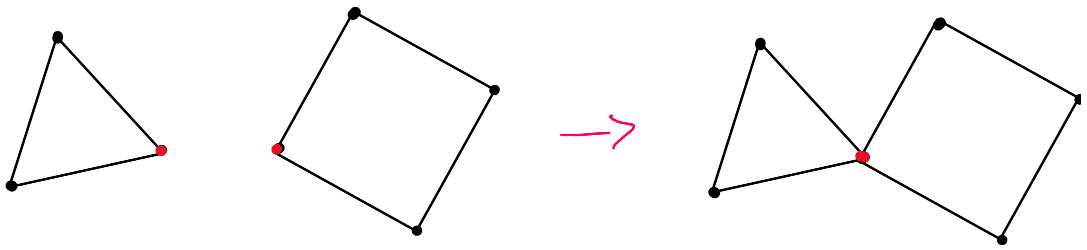
QUINDI $\forall v, w \in V(G)$ v E w SONO IN G SE E SOLO SE $\theta(v)$ E θ ADIACENTI IN H.

- GRAFI 2-ISOMORF

DEFINIAMO LE SEGUENTI OPERAZIONI SU

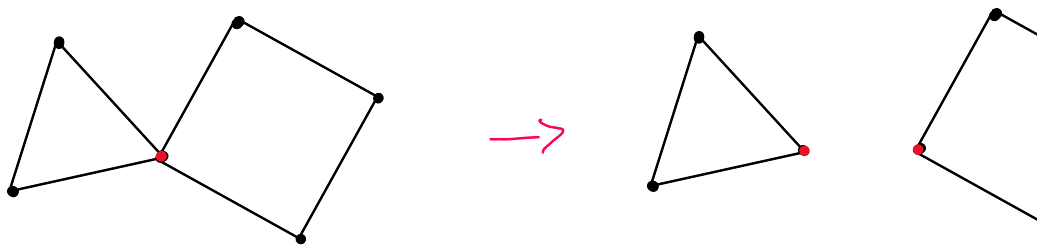
IDENTIFICAZIONE DI UN VERTICE (VI):

DATI v E v' VERTICI APPARTENENTI A
CONNESSE DISTINTE DI G, G VIEN
IDENTIFICANDO v E v' IN UN UNICO V



SEPARAZIONE DI UN VERTICE (VC):

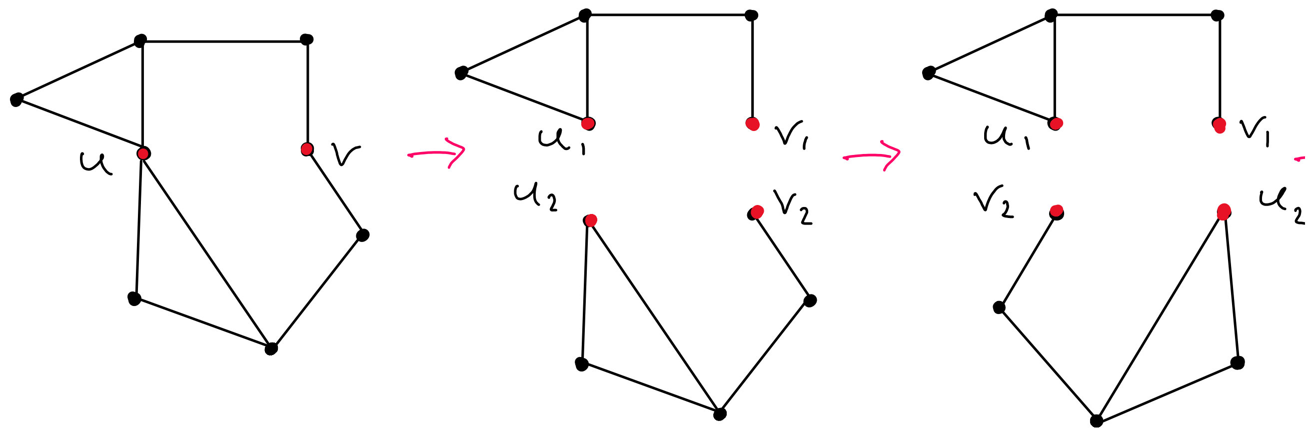
È L'OPERAZIONE INVERSA DI (VI) ED
SOLO A PARTIRE DA VERTICI DI TAGLIO



TWISTING (T):

SUPPONIAMO CHE G SI POSSA FORM
DA DUE GRAFI G_1 E G_2 IDENTIFICA
VERTICE $u_1 \in V(G_1)$ CON UN VERTICE
IN UN VERTICE u E IDENTIFICANDO U
$v_1 \in V(G_1)$ CON UN VERTICE $v_2 \in V(G$
VERTICE v.

IL TWISTING ASSOCIATO AI VERTICI GENERA IL GRAFO FORMATO A PAR[TIRE DA] G_1 E G_2 IDENTIFICANDO IL VERTI[CE u_1 CON] IL VERTICE V_2 E IDENTIFICANDO [u_2] CON IL VERTICE V_1.



SE G PUÒ ESSERE TRASFORMATO ATTRAVERSO UNA SEQUENZA DI G[…] OPERAZIONI SI DICE CHE G E [H SONO] 2-ISOMORFI E SI SCRIVE $G \simeq_2 H$

OSSERVAZIONI:

1) $\simeq_2$ È UNA RELAZIONE DI EQ[UIVALENZA]
2) $G \simeq_2 H \longrightarrow \mathcal{C}(G) \simeq \mathcal{C}(H)$
3) SE G È UN BLOCCO 3-CONNES[SO]

$$G \simeq_2 H \longleftrightarrow G \simeq H.$$

- CICLI GENERALIZ[ZATI]

SIA $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. UN GRAFO G È DE[TTO] …

GENERALIZZATO (G.C.) CON PARTI

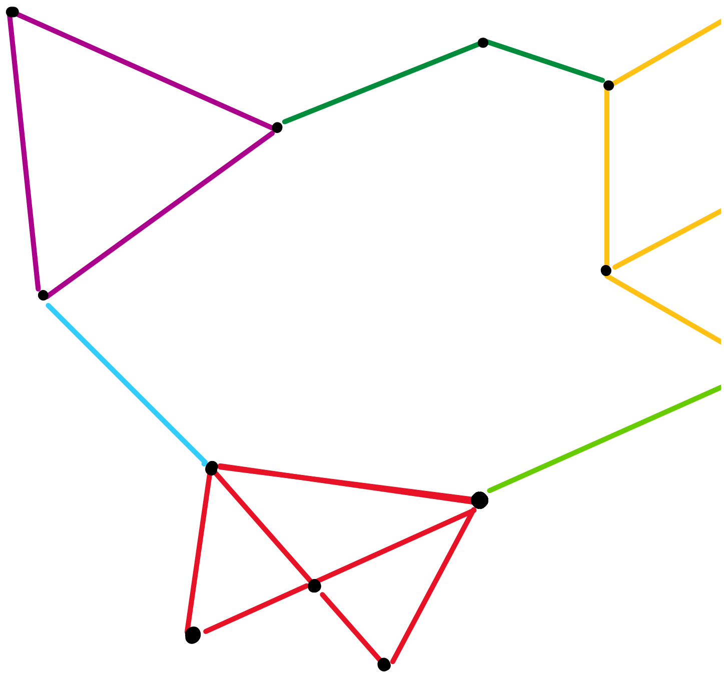
1) $\forall j$ G_j È UN SOTTOGRAFO CONNESS
ALMENO UN LATO E SE $k=2$ |V

2) GLI INSIEMI $E(G_1), \dots, E(G_k)$
PARTIZIONE DI $E(G)$ E CHIAM

$$G_{-j} = \bigcup_{i \neq j} G_j \quad \forall j$$

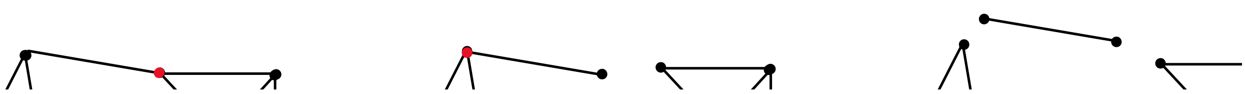
SI HA $V(G_j) \cap V(G_{-j}) = \{ v_{j,1}, v_{j,2}$
($v_{j,1}$ E $v_{j,2}$ VENGONO DETTI VERT

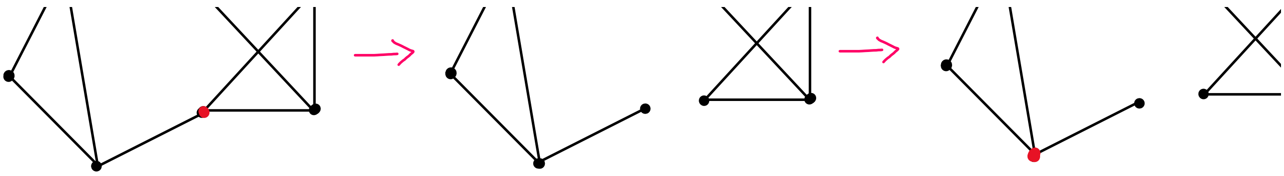
3) SOSTITUENDO CON OGNI G_j U
CONGIUNGE $v_{j,1}$ E $v_{j,2}$ SI OTT



LEMMA 2:

SE G È UN BLOCCO NON 3-CONNESSO CON
ALLORA G È UN G.C. LE CUI PARTI SONO





PROOF:

Sia $\{u,v\}$ un 2-insieme di taglio,
2 componenti connesse H_1 e H_2

$$V_1 := V(H_1) \qquad V_2 := V(H_2)$$

$$G_1 := G[V_1 \cup \{u,v\}] \qquad G_2 := G[V_2 \cup$$

$$G_2' := G_2 - G[\{u,v\}]$$

G è un G.C. con parti G_1 e G_2'.
Se G_1 non è un blocco allora G_1
di due suoi sottografi $G_{1,1}$ e $G_{1,2}$

$$|V(G_{1,i})| \geq 2 \quad i \in \{1,2\}$$

$$V(G_{1,1}) \cap V(G_{1,2}) = x \in V(G_1$$

Dal momento che G è un blocco $x \notin$
Allora G è un G.C. con parti $G_{1,1}$,
Iterando il ragionamento un numero
volte otteniamo l'asserto.

LEMMA 3:

Sia G un blocco e un G.C. con p
dove G_i è un blocco $\forall i$;
Sia H tale che esiste un isomor

$$\Theta : M(G) \longrightarrow M(H)$$

SIA $H_i = H[\theta(E(G_i))]$ $\forall i$,
ALLORA H È UN G.C. CON PARTI

PROOF:

DEFINIAMO $G_{-J} = \bigcup_{i \neq J} G_i$ $H_{-J} = \bigcup_{i \neq J} H_i$

$G, G_1, \dots, G_K$ SONO BLOCCHI QUINDI
$H, H_1, \dots, H_K$ SONO BLOCCHI

$\exists C \in \mathcal{C}(G)$ T.C. $C \cap E(G_i) \neq \emptyset$ $\forall i$

$\downarrow$

$\exists C \in \mathcal{C}(H)$ T.C. $C \cap E(H_i) \neq \emptyset$ $\forall i$

IN PARTICOLARE SCELTO J

$\exists e = xx' \in E(H_{-J})$ T.C. $x \in V(H_J)$

SIA $f \in E(H_J)$

$\exists C_1 \in \mathcal{C}(H)$ T.C. $e, f \in C_1$

$C_1 = x e x' C_1' \, y \, C_1'' \, x$

CON $C_1' \subset E(H_{-J})$ E $y \in V(H_{-J}) \cap V(H_J)$

SIA $P := x e x' C_1' y \subset E(H_{-J})$

ADESSO SIA $u \in V(G_J) \cap V(G_{-J})$ E SIA E
G_J È UN BLOCCO QUINDI E_u È UN TAGLI
DI G_J; DI CONSEGUENZA ANCHE $\theta(E$
È UN TAGLIO MINIMALE DI H_J E
$H_J - \theta(E_u)$ HA 2 COMPONENTI CONNES

CLAIM:

OGNI CICLO DI H CHE HA UN LATO IN
LATO IN H_{-J} HA UN LATO ANCHE IN

PROOF:

È DIRETTA CONSEGUENZA DEL FATTO CH
CICLO DI G CHE HA UN LATO IN G_J E
LATO IN G_{-J} HA UN LATO ANCHE IN

ADESSO SUPPONIAMO CHE x E y SIAN
STESSA COMPONENTE CONNESSA DI $H_J - \Theta$
$\exists$ CAMMINO $Q \subset E(H_J - \Theta(E_w))$

ALLORA IL CICLO $P \cup Q$ CONTRADDICE IL

$P \cup Q \cap E(H_J) \neq \phi$, $P \cup Q \cap E(H_{-J}) \neq \phi$, P

QUINDI x E y DEVONO TROVARSI
CONNESSE DIVERSE DI $H_J \setminus \Theta(E_w)$

$$x \in V(H_J^x) \qquad y \in V(H_J^y)$$

PER ASSURDO $\exists z \in V(H_J) \cap V(H_{-J}) -$

SIANO $g = zz' \in \partial_{H_{-J}}(z)$ $h = zz'' \in$

$\exists C_2 \in \mathcal{C}(H)$ T.C. $g, h \in C_2$, $C_2 =$

CON $C_2' \subset E(H_{-J})$, $V(C_2') \cap V(P) = \phi$ E

SIA $Q = z g z' C_2' w$

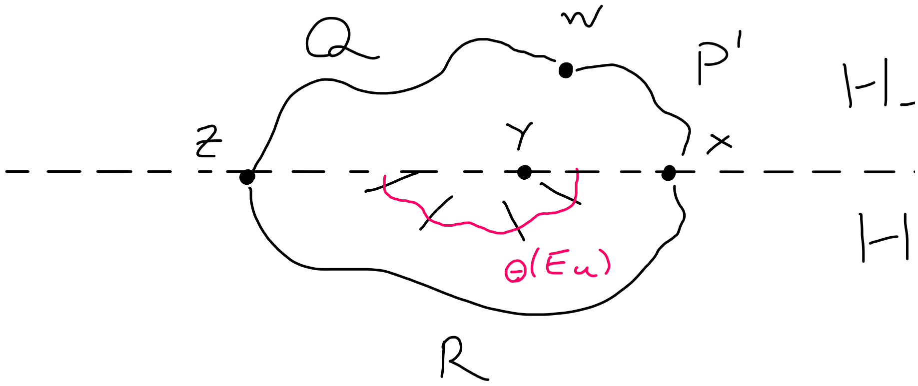
A SECONDA DI DOVE SI TROVA w
COSTRUIRE UN CICLO C_3 CHE CONT
OVVERO TALE CHE

$$C_3 \cap E(H_J) \neq \phi, \quad C_3 \cap E(H_{-J}) \neq \phi,$$

CASO 1:

$w \in V(P)$, sia $P' = wPx$ e sia R un

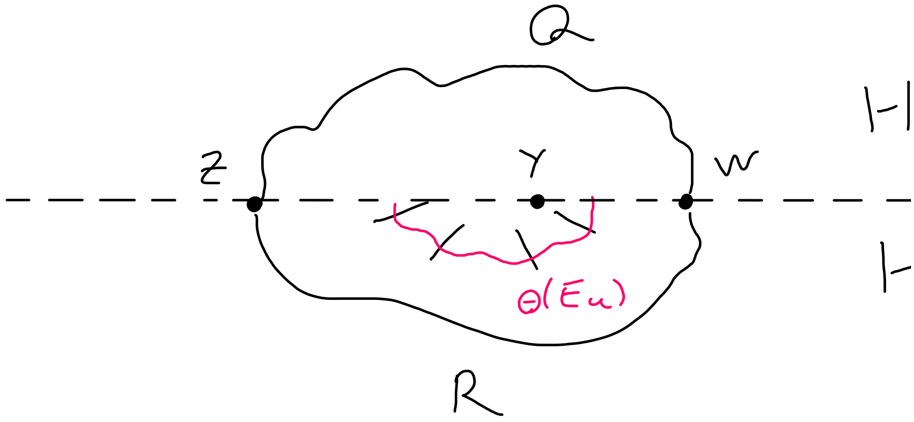
tra x e z, allora $C_3 = Q \cup P' \cup R$



CASO 2:

$w \in V(H_J^x) - V(P)$, sia R un cammino in

allora $C_3 = Q \cup R$.

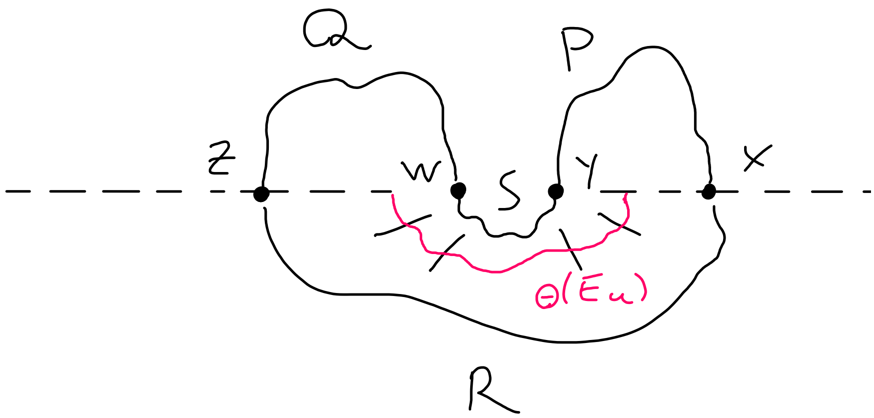


CASO 3:

$w \in V(H_J^y) - V(P)$, sia R un cammino in

e sia S un cammino in H_J^y tra y e

allora $C_3 = S \cup P \cup Q \cup R$.



In conclusione $|V(H_J) \cap V(H_{-J})| =$

QUINDI H È UN G.C. CON PARTI H_i
(CIASCUNA DI ESSE È UN BLOCCO

- TEOREMA DEL 2-ISOMORFISMO DI

SIANO G E H GRAFI SENZA VERTICI ISO

$$M(G) \simeq M(H) \longleftrightarrow G \simeq_2 H$$

PROOF:

($\leftarrow$)

SEGUE BANALMENTE DAL FATTO CHE LE (VI), (VC) E (T) NON ALTERANO GL DEI LATI DEI CICLI DI UN GRAFO.

($\longrightarrow$)

SIA $\theta: E(G) \longrightarrow E(H)$ LA BIEZIONE C L'ISOMORFISMO $M(G) \simeq M(H)$.
SIANO G^+ E H^+ I GRAFI OTTENUTI DISGIUNTA DEI BLOCCHI DI G E D RISPETTIVAMENTE.

È CHIARO CHE

$$M(G^+) \simeq M(G) \simeq M(H) \simeq M(H^+)$$

$$G^+ \simeq_2 G \quad , \quad H^+ \simeq_2 H$$

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $G^+ \simeq H^+$ E
DAL MOMENTO CHE $c(G^+) = c(H^+)$, CI B VEDERE CHE OGNI COMPONENTE CONN DI G È 2-ISOMORFA ALLA SUA IMMAGIN

SIA QUINDI G UN BLOCCO E SIA H

$M(G) \simeq M(H)$ PROCEDIAMO PER INDUZI

PER $|V(G)| \leq 3$ SI VERIFICA MANUALMEN

SUPPONIAMO QUINDI CHE L'ASSERTO SIA

$|V(G)| < n$ E SIA $|V(G)| = n \geq 4$.

SE G È 3-CONNESSO $G \simeq H$ PER

SUPPONIAMO CHE G NON SIA 3-CONNE

PER IL LEMMA 2 G È UN G.C. CON PA

E CIASCUNA DI ESSE È UN BLOCCO.

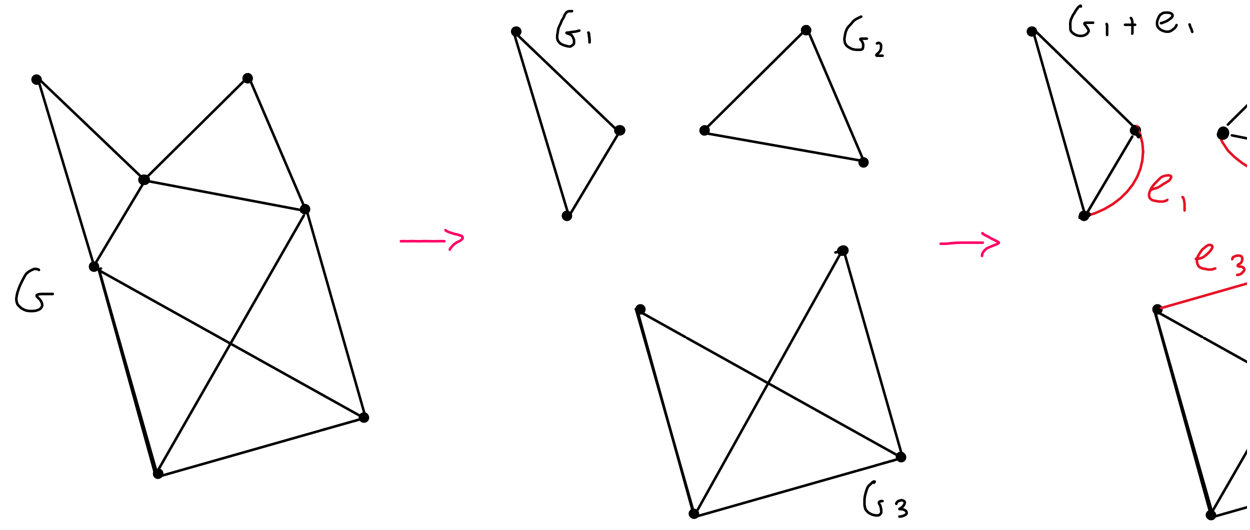
PER IL LEMMA 3 H È UN G.C. CON

$H_1, \ldots, H_v$ DOVE $H_i = H[\theta(E(G_i))]$ $\forall$

SIANO $G_i + e_i$ E $H_i + f_i$ GRAFI OTTENUT

UN LATO TRA I VERTICI DI CONTATTO

RISPETTIVAMENTE.



L'ISOMORFISMO $\theta : M(G_i) \to M(H_i)$ SI ESTE

ISOMORFISMO $\theta : M(G_i + e_i) \to M(H + f_i)$

$\theta(e_i) = f_i$.

PER IPOTESI INDUTTIVA ABBIAMO CHE $G_i +$

OGNI 2-INSIEME DI TAGLIO IN $V(H_i + f_i)$ È

DI TAGLIO IN H, QUINDI POSSIAMO POSS

TRASFORMARE H IN UN G.C. H' CON P

$H'_1, \dots, H'_k$ TALE CHE

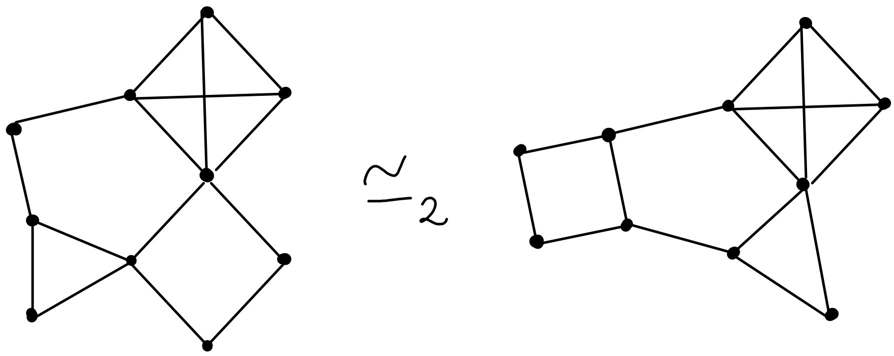
$$H_i \simeq_2 H'_i \ \forall i, \quad H \simeq_2 H', \quad \forall i \ \exists j \text{ T.}$$

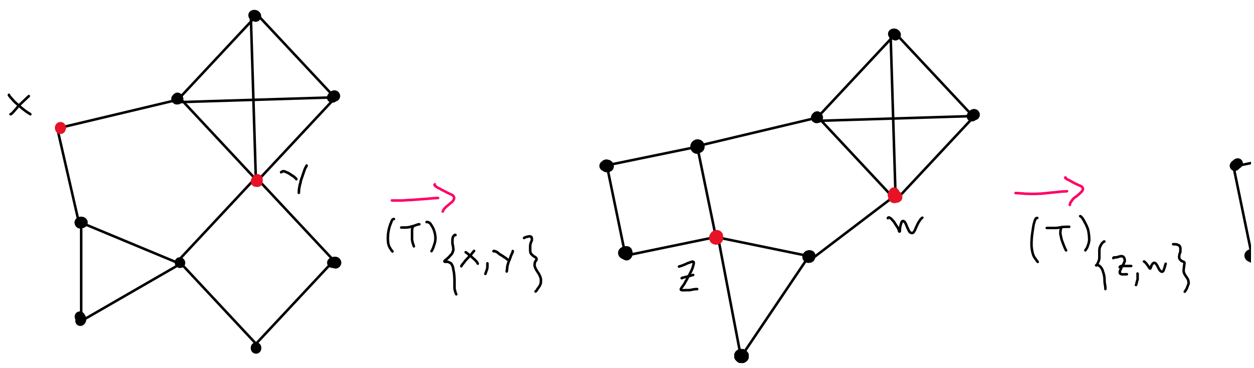
CLAIM:

SIA G UN G.C. CON PARTI $G_1, \dots, G_k$ E SIA H UN G.C. CON PARTI $H_1, \dots, H_k$, CHE $\forall i \ \exists j$ T.C. $G_i \simeq H_j$, ALLORA $G \simeq$

PROOF:

LA DIMOSTRAZIONE È UN SEMPLICE FOR NE ILLUSTRIAMO L'IDEA CON UN ESEMPI





GRAZIE AL CLAIM POSSIAMO CONCLUDE

$$G \simeq_2 H' \simeq_2 H$$

E QUINDI

$$G \simeq_2 H$$