IL TEOREMA DI MENGER

Seminario di Teoria dei grafi

Francesca Percario

Introduzione e cenni storici

Il teorema di Menger venne dimostrato per la prima volta da Karl Menger nel 1927 e afferma che, *data una coppia di vertici x e y, il massimo numero di xy-cammini arco-disgiunti orientati è uguale al minimo numero di archi in un (x, y)-taglio*.

Successivamente questo teorema è stato generalizzato e rivisto in vari modi, come ad esempio il teorema di <u>Massimo-flusso Minimo-taglio</u> del 1956, un teorema elementare nel campo dei flussi di rete che ha avuto implicazioni sorprendenti nella teoria dei grafi.

Furono inoltre elaborate dimostrazioni del teorema alternative a quella proposta da Menger, ma soprattutto venne data una formulazione equivalente del teorema, dimostrata da Goring nel 2000: *data una coppia di vertici x e y, il numero massimo di xy-cammini disgiunti internamente a due a due è uguale al numero minimo di vertici in un xy-taglio-di-vertici*.

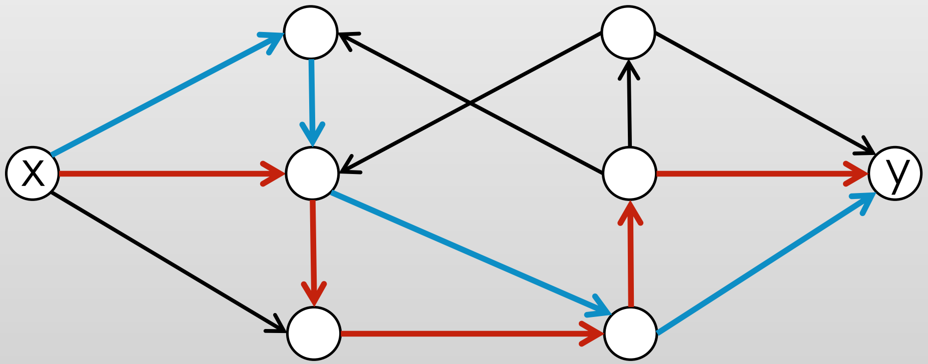
CONNETTIVITA' & TEOREMI DI MENGER VERSIONE LATI

Notazione e definizioni

Definizione: Un **digrafo** è una coppia ordinata **D := (V(D), A(D))** tale che **V(D)** è l'insieme dei vertici e **A(D)** è l'insieme degli archi, insieme alla funzione d'incidenza $\boldsymbol{\psi}$: A(D) → $V^2(D)$ che associa ad ogni arco una coppia ordinata di vertici di D. Denotiamo un digrafo D con due vertici distinti x e y come **D := D(x, y)**.

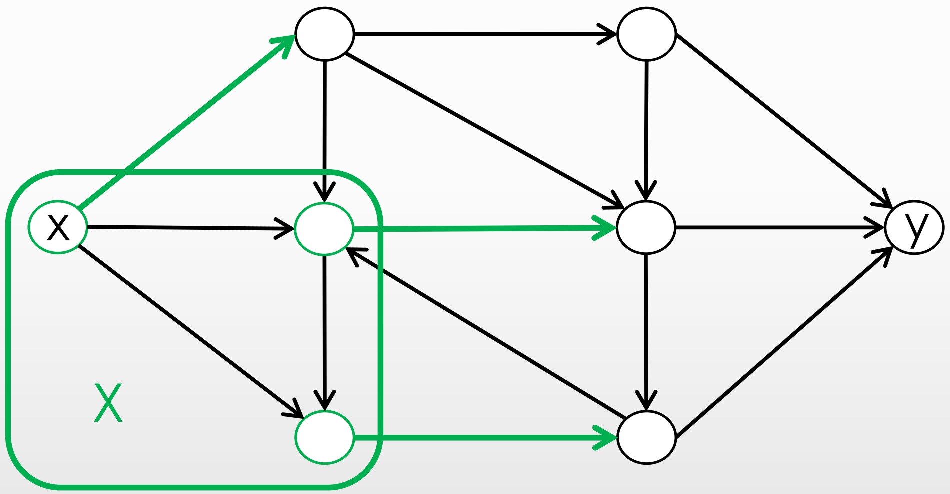
Definizione: Una **rete N := N(x, y)** è un digrafo D con due vertici distinti, una sorgente x e un pozzo y, con una **funzione capacità c** a valori reali non negativa definita sul suo insieme di archi. La **capacità di un arco e**, **c(e)**, è il valore della funzione c sull'arco e ed è il massimo valore del flusso f(e) lungo l'arco che non può essere superato, $0 \leq f(e) \leq c(e)$.

Definizione: In un digrafo D(x, y) due xy-cammini si dicono **arco-disgiunti** se non hanno archi in comune, cioè se nessun arco del digrafo è contenuto in più di un cammino.



Definizione: In un digrafo D(x, y), un **(x,y)-taglio** è un taglio $\mathbf{K} := \boldsymbol{\partial}^{+}(\boldsymbol{X})$ tale che separa y da x, cioè x ∈ X e y ∈ V\X. La **capacità di K** è la somma delle capacità dei suoi archi uscenti da X ed entranti in V\X,

$$\boldsymbol{cap}(\boldsymbol{K}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{e\ uscenti} \\ \boldsymbol{da\ X}}} c^{+}(e) = \boldsymbol{c}^{+}(\boldsymbol{X}).$$



Corollario

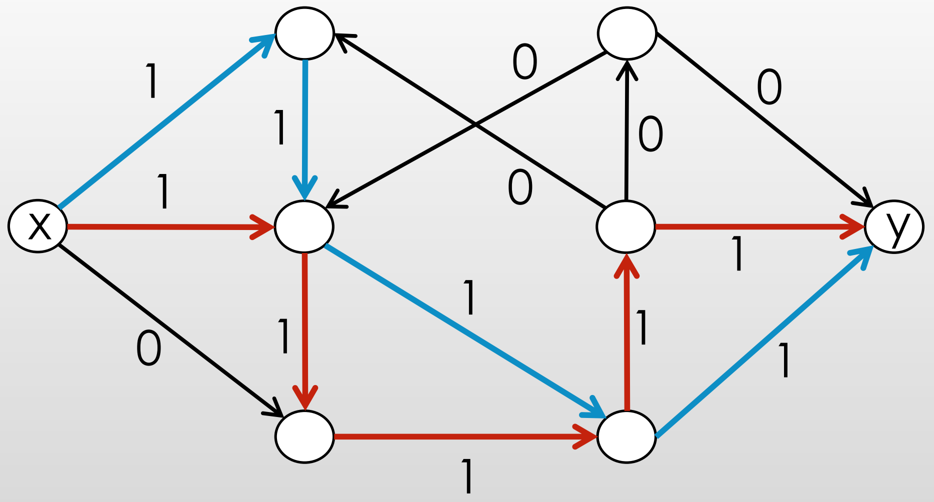
Sia N := N(x, y) una rete in cui ogni arco è di capacità unitaria (c(e) = 1). Allora N ha un flusso-xy di valore k se e solo se il suo digrafo D := D(x, y) ha k xy-cammini arco-disgiunti orientati.

Dimostrazione:

(←) Siano $P_1, \ldots, P_k$ i k xy-cammini arco-disgiunti orientati in D. Costruiamo il flusso nella rete N: il flusso su un arco e è

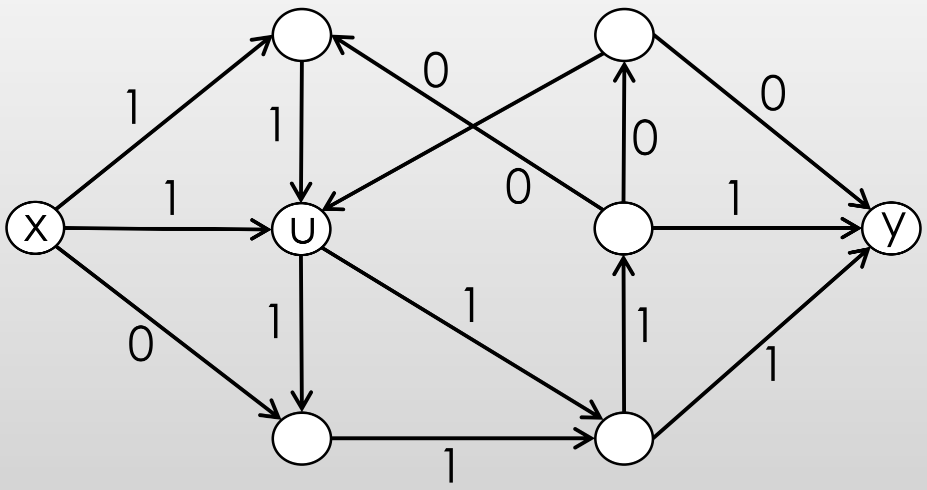
$$f(e) = \begin{cases} 1 & \text{e partecipa ad un cammino } P_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questo è un flusso valido perché ogni cammino è una sequenza di archi e quindi il flusso si propaga proprio tramite questi archi. Il flusso è di valore 1 su ciascun cammino, quindi in totale il flusso ha valore k, poiché i k cammini sono arco-disgiunti, non esiste problema di sovrapposizione e ciascun cammino contribuisce di 1 unità al flusso di N.



$f^+(v) = f^-(v),\ \forall v \in V \setminus \{x, y\}$

(→) Sia f flusso intero di valore k in N. Consideriamo un arco uscente dalla sorgente (x, u) con flusso pari a 1. Poiché tutte le capacità sono uguali a 1 e il valore del flusso è intero, su ogni arco del grafo il flusso o è 0 o è 1, $0 \leq f(e) \leq 1$. Per la conservazione del flusso siccome in u entra 1 unità di flusso, allora dovrà uscire da u sempre 1 unità di flusso: questo implica che esiste almeno un arco (u, v) da u ad un qualsiasi altro nodo v con $f(u, v) = 1$. Si continua in questo modo scegliendo sempre nuovi archi fino ad arrivare a y; partendo da x riusciamo a costruire un cammino che arriva a y. Se il flusso totale ha valore k, possiamo trovare k cammini usando la tecnica vista precedentemente tutti disgiunti tra loro, ottenendo così k cammini arco-disgiunti. ■

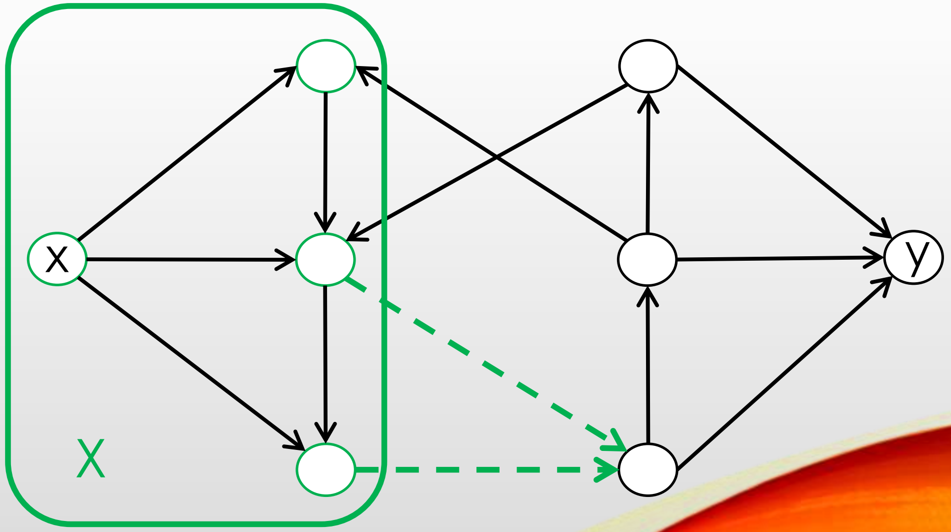


1) Teorema di Menger (versione grafi orientati-archi)

Dato un digrafo D(x, y), il massimo numero di xy-cammini arco-disgiunti a due a due è uguale al minimo numero di archi in un (x, y)-taglio.

Dimostrazione: Dimostriamo il primo verso, ≤:

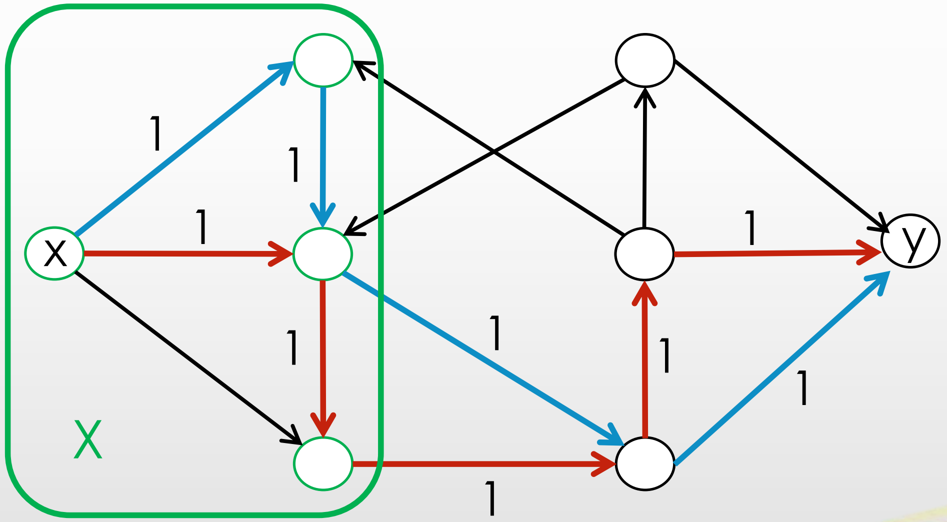
supponiamo che il minimo numero di archi del (x, y)-taglio, che sconnettono y da x, sia k. Se abbiamo sconnesso y da x, allora ogni xy-cammino usava almeno un arco del (x, y)-taglio (perché se p.a. esistesse un cammino che non usa archi del (x, y)-taglio, allora il cammino non si eliminerebbe, quindi x e y connessi), quindi il n° di xy-cammini arco-disgiunti è al massimo k, ≤ k.



Dimostriamo il secondo verso, ≥:

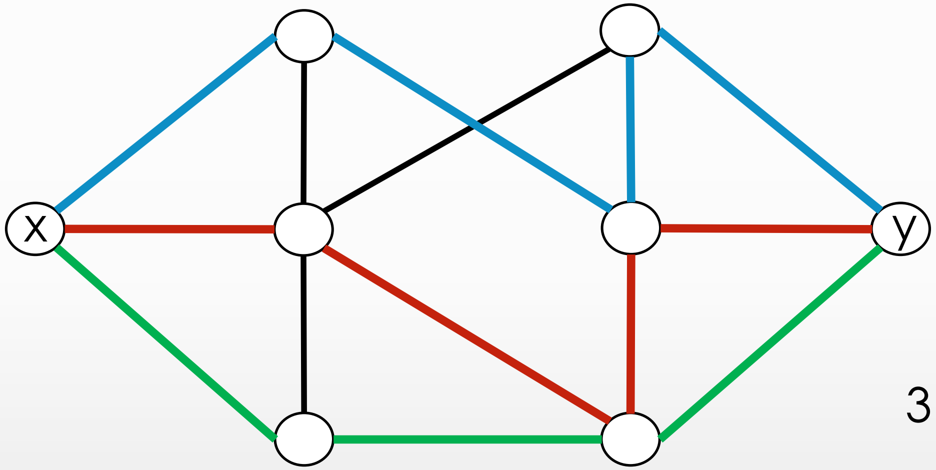
Corollario

supponiamo che il **massimo** n° di xy-cammini arco-disgiunti sia k. Allora il valore del **massimo** flusso è uguale a k se assegniamo a ciascun arco dei cammini capacità unitaria (c(e) = 1). Per il teorema del Massimo-flusso Minimo-taglio deve esistere un taglio minimo (X, V\X) di capacità uguale a k. Sia F l'insieme degli archi che attraversano il taglio da X a V\X; si ha che |F| = k (perché ogni arco ha capacità 1) e questi k archi sconnettono y da x, quindi il minimo n° di archi che sconnettono y da x è al massimo k, ≤ k. ■



Definizioni

Definizione: In un grafo G(x, y) due xy-cammini sono **disgiunti per lati** se <u>non</u> hanno lati in comune, cioè se <u>nessun lato del grafo è contenuto in più di un cammino</u>.



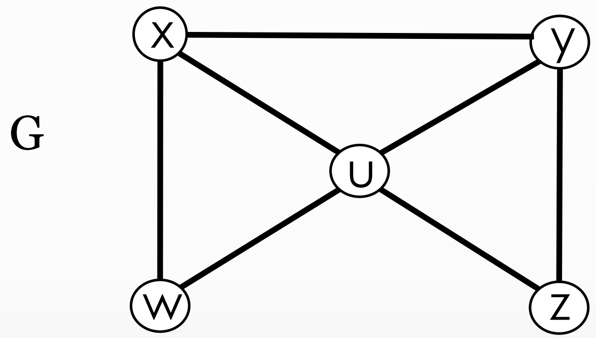
3 xy-cammini disgiunti per lati

Definizione: Dati un grafo G e due vertici distinti qualsiasi x, y ∊ V(G), la **connettività locale per lati** tra x e y è il **<u>numero massimo</u>** di xy-cammini disgiunti per lati a due a due, denotato con **p'(x, y)**.

Definizione: Un grafo non banale G si dice **k-connesso per lati** se ∀u, v ∊ V(G) vertici distinti in G, **p'(u, v) ≥ k**.

La **connettività per lati di G, κ'(G)**, è il <u>più grande valore k per il quale G è k-connesso per lati</u>,

$\kappa'(G) = \min \{p'(u, v) \mid u, v \in V(G), u \neq v\}$.



$p'(x, y) = 3$
$p'(u, z) = 2$

$\kappa'(G) = 2$

Osservazioni:

- Un grafo banale si dice 0-connesso per lati e 1-connesso per lati, ma non k-connesso per lati se $k > 1$;
- G è 1-connesso per lati sse G è connesso;
- $\kappa'(G) = 0$ sse G è sconnesso.

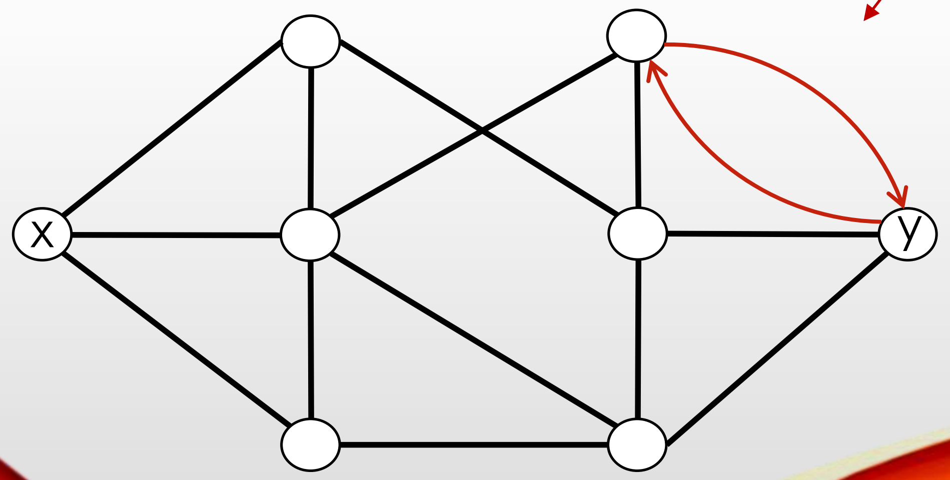
Definizione: Un **xy-taglio** in G è un taglio $\partial(X)$ tale che <u>separa y da x</u>, quindi $x \in X$ e $y \in V \setminus X$. La **<u>dimensione minima</u>** di un xy-taglio che separa x e y è indicata con **c'(x, y)**.

Esiste una versione corrispondente del teorema di Menger per i grafi non orientati. Indichiamo con **G := G(x, y)** un grafo G con due vertici distinti x e y.

2) Teorema di Menger (versione grafi non orientati-lati)

Dato un grafo G(x, y), il massimo numero di xy-cammini disgiunti per lati a due a due è uguale al minimo numero di lati in un xy-taglio, **p'(x, y) = c'(x, y)**.

Dimostrazione: Si applica il Teorema di Menger (1) (versione orientata-archi) al **digrafo associato di G**, **D(G)**, ottenuto sostituendo ogni lato e di G con 2 archi orientati opposti, con le stesse estremità di e. ■



CONNETTIVITA' & TEOREMI DI MENGER VERSIONE VERTICI

Definizioni

Definizione: Due xy-cammini *P* e *Q* in un grafo G sono **internamente disgiunti** se non hanno vertici interni in comune, quindi se $V(P) \cap V(Q) = \{x, y\}$.

Definizione: Dati un grafo G e due vertici distinti qualsiasi x, y ∈ V(G), la **connettività locale** tra x e y è il **numero massimo** di xy-cammini internamente disgiunti a due a due, denotato con **p(x, y)**.

Definizione: Un grafo non banale G si dice **k-connesso (per vertici)** se ∀u, v ∈ V(G) vertici distinti in G, **p(u, v) ≥ k**.
La **connettività di G, κ(G)**, è il più grande valore k per il quale G è k-connesso,

$$\kappa(G) = \min \{p(u, v) \mid u, v \in V(G), u \neq v\}.$$

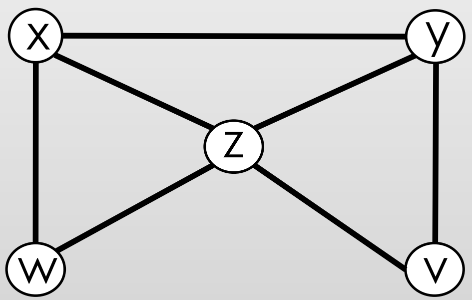
Osservazioni:

- Un grafo banale si dice 0-connesso e 1-connesso, ma non k-connesso se k > 1;
- G è 1-connesso sse G è connesso;
- κ(G) = 0 sse G è sconnesso.

$p(x, y) = 2$

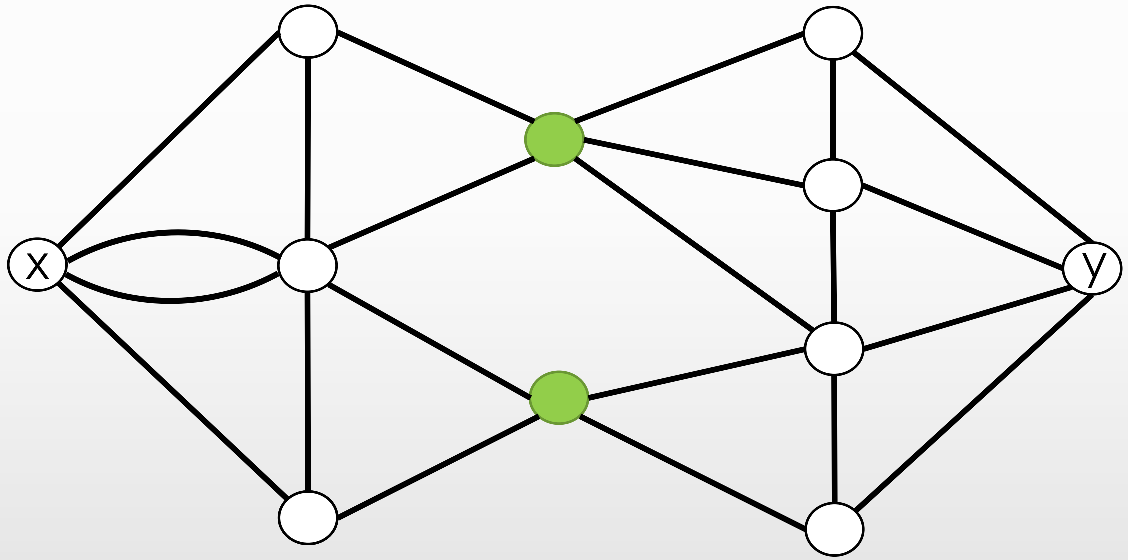
$p(z, y) = 3$

$\kappa(G) = 2$



G

Definizione: Siano x e y vertici distinti non adiacenti di un grafo G. Un **xy-taglio-di-vertici** è un **sottoinsieme S di vertici** in V(G)\{x, y} che separa y da x, i.e. x e y appartengono a differenti componenti di G – S. La **dimensione minima** di un xy-taglio-di-vertici che separa x e y è indicata con **c(x, y)**.



c(x, y) = 2

Se |S| = k allora S si chiama **k-taglio-di-vertici**, se |S| =1 allora S è un vertice di taglio.

Mostriamo ora che se G ha almeno una coppia di vertici non adiacenti, la minima cardinalità di un xy-taglio-di-vertici di G è uguale alla connettività di G.

3) Teorema di Menger (versione grafi non orientati-vertici)

Dato un grafo G(x, y) con x e y vertici non adiacenti, il numero massimo di xy-cammini disgiunti internamente a due a due è uguale al numero minimo di vertici in un xy-taglio-di-vertici, ***p(x, y) = c(x, y)***.

Dimostrazione: Dimostriamo per induzione sul numero dei lati di G, $|E(G)| = m$.

Poniamo **k** $:= c_G$**(x, y)**. Sicuramente non esistono più di k xy-cammini internamente disgiunti, p_G**(x, y) ≤ k**, perché data una famiglia $\mathcal{P}$ di xy-cammini internamente disgiunti, ogni xy-taglio-di-vertici che separa y da x incontra $\mathcal{P}$ in almeno $|\mathcal{P}|$ vertici distinti, cioè un xy-taglio-di-vertici contiene almeno un vertice da ciascun cammino della famiglia $\mathcal{P}$ (se i cammini fossero più di k, il minimo xy-taglio-di-vertici di dimensione k non riuscirebbe a disconnettere y da x), **quindi è sufficiente mostrare che** p_G**(x, y) ≥ k per ottenere l'uguaglianza**.

Supponiamo che il teorema sia vero per grafi con m –1 lati → verifichiamolo per m lati.

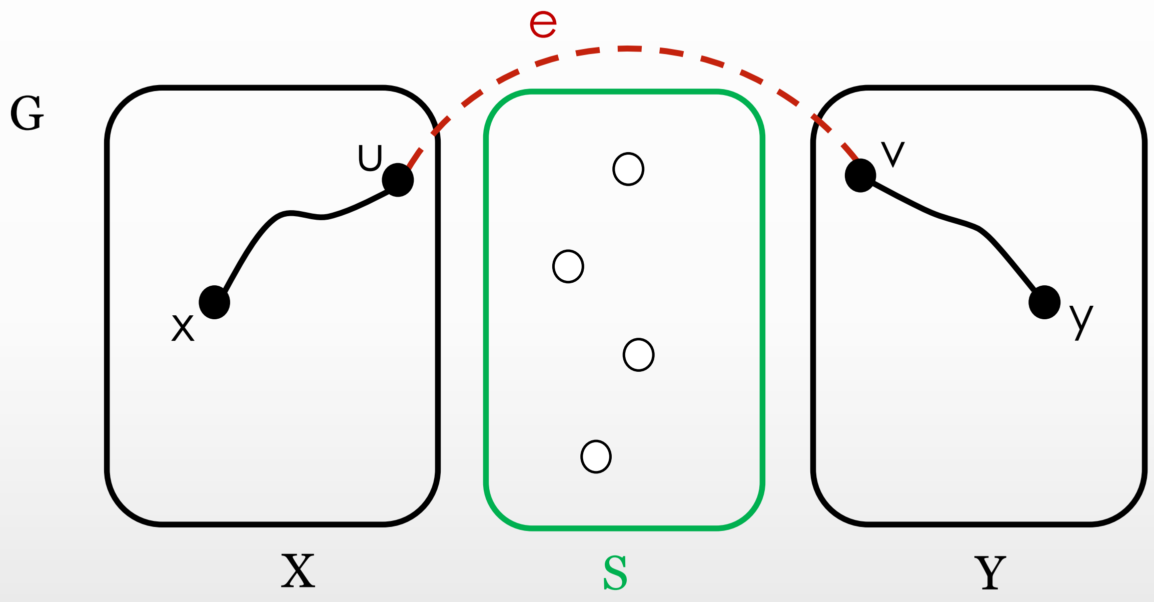
Supponiamo che esista un arco e = uv incidente né a x né a y e impostiamo H := G\e; poiché H è un sottografo di G, $\boldsymbol{p_G}$**(x, y) ≥** $\boldsymbol{p_H}$**(x, y)** e inoltre per induzione $\boldsymbol{p_H}$**(x, y) =** $\boldsymbol{c_H}$**(x, y)**.

Si ha che $\boldsymbol{c_G}$**(x, y) ≤** $\boldsymbol{c_H}$**(x, y) + 1** perché in generale un qualunque xy-taglio-di-vertici in H, insieme ad entrambe le estremità di e, è un xy-taglio-di-vertici in G. Abbiamo quindi

$$p_G(x, y) \geq p_H(x, y) = c_H(x, y) \geq c_G(x, y) - 1 = k - 1.$$

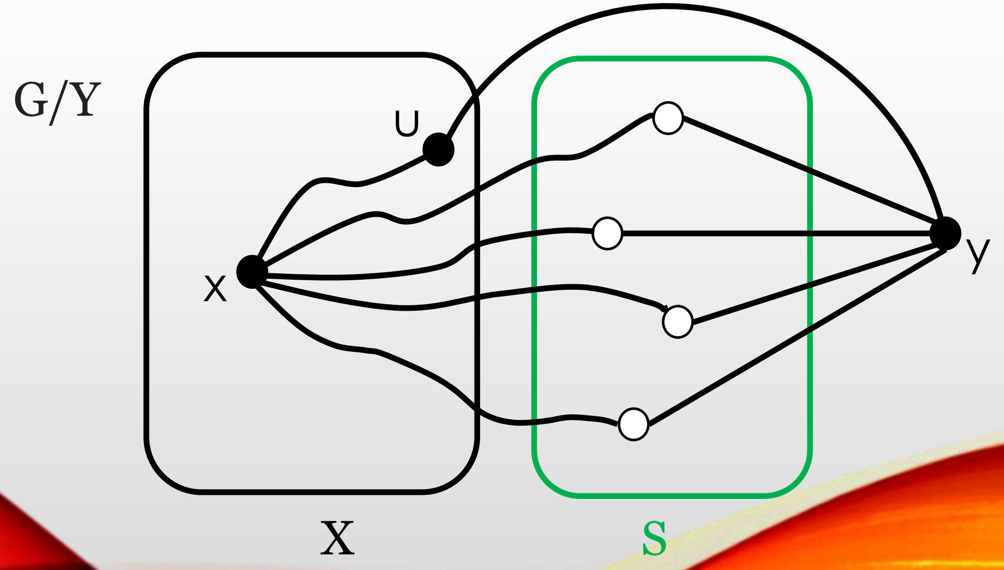
Possiamo presumere che l'uguaglianza valga ovunque, quindi p_G(x, y) = k–1 (in caso contrario si ha la disuguaglianza p_G(x, y) ≥ k e non c'è più niente da dimostrare) e in particolare si ha $\boldsymbol{c_H}$**(x, y) = k – 1**.

Sia S = { v_1,. . ., v_{k-1}} un xy-taglio-di-vertici minimo in H, sia X l'insieme di vertici raggiungibili da x in H – S e sia Y l'insieme di vertici raggiungibili da y in H – S. Visto che |S| = k – 1, **<u>l'insieme S non è un xy-taglio-di-vertici di G</u>** (c_G(x, y)= k quindi S è troppo piccolo e non sconnette y da x), **<u>quindi esiste un xy-cammino in G – S</u>**, il quale include necessariamente il lato e, quindi possiamo assumere che u ∈ X e v ∈ Y.

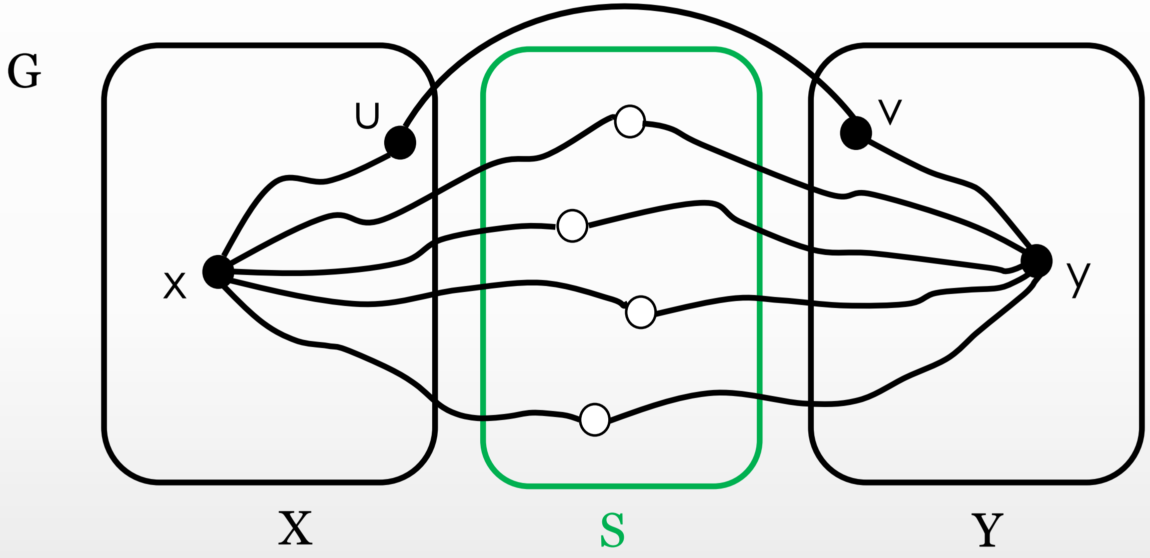


Consideriamo ora il grafo G/Y ottenuto da G contraendo Y a un unico vertice y. Ogni generico xy-taglio-di-vertici T in G/Y **è necessariamente un xy-taglio-di-vertici in G**, perché se P fosse un xy-cammino in G che evita T, anche il sottografo P/Y di G/Y conterrebbe un xy-cammino in G/Y che evita T, quindi $c_{G/Y}$(x, y) ≥ k (= c_G(x, y)).

D'altra parte $c_{G/Y}$(x, y) ≤ k, perché S ∪ {u} è un xy-taglio-di-vertici di G/Y. Ne segue che S ∪ {u} è un minimo xy-taglio-di-vertici di G/Y, $\boldsymbol{c_{G/Y}}$**(x, y) = k** e, per induzione, ci sono k xy-cammini internamente disgiunti $P_1, \ldots, P_k$ in G/Y, $\boldsymbol{p_{G/Y}}$**(x,y) = k,** e ogni vertice del xy-taglio-di-vertici S ∪ {u} appartiene ad ognuno di essi. Possiamo quindi assumere che ogni v_i ∈ V(P_i), per 1 ≤ i ≤ k – 1, e u ∈ V(P_k).



Si hanno ugualmente k xy-cammini internamente disgiunti $Q_1, . . ., Q_k$ nel grafo G/X ottenuto contraendo X ad x con $v_i \in V(Q_i)$, per 1 ≤ i ≤ k - 1, e v ∈ Q_k. Ne consegue che ci sono k xy-cammini internamente disgiunti in G, $xP_iv_iQ_iy$, per 1 ≤ i ≤ k −1, e xP_kuvQ_ky. ■



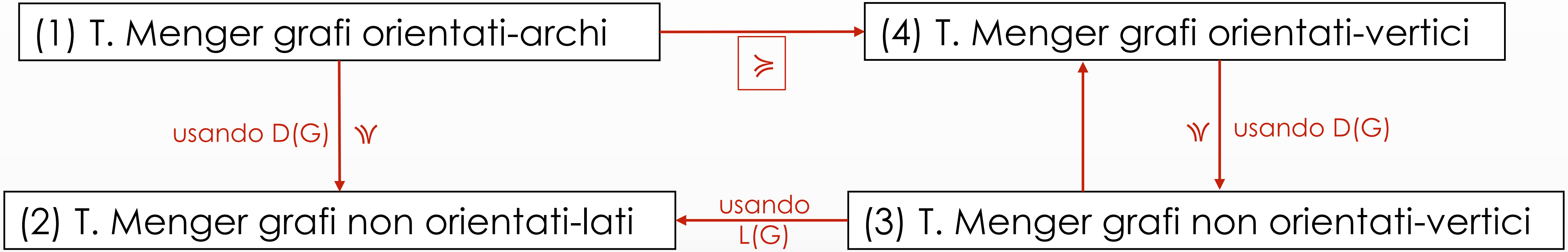
Definizione: In un digrafo D, un **(x, y)-taglio-di-vertici** è un **sottoinsieme S di vertici** in V(D)\{x, y} la cui rimozione sconnette tutti i xy-cammini orientati.

Definizione: Due xy-cammini *P* e Q in un digrafo D sono **internamente disgiunti orientati** se non hanno vertici interni in comune, quindi se $V(P) \cap V(Q) = \{x, y\}$.

4) Teorema di Menger (versione grafi orientati-vertici)

Dato un digrafo D(x, y) con x e y vertici non adiacenti, il numero massimo di xy-cammini orientati internamente disgiunti a due a due è uguale al numero minimo di vertici in un (x,y)-taglio-di-vertici.

Relazioni tra i 4 teoremi di Menger



Una **riduzione polinomiale** di un problema P a un problema Q è una coppia di algoritmi tempo-polinomiali, uno che trasforma ogni istanza di P in un'istanza di Q, e l'altro che trasforma una soluzione per l'istanza di Q in una soluzione per l'istanza di P. Se esistesse una tale riduzione, diremo che P è riducibile in tempo polinomiale a Q, **P⩽Q**; questa relazione è sia riflessiva che transitiva.

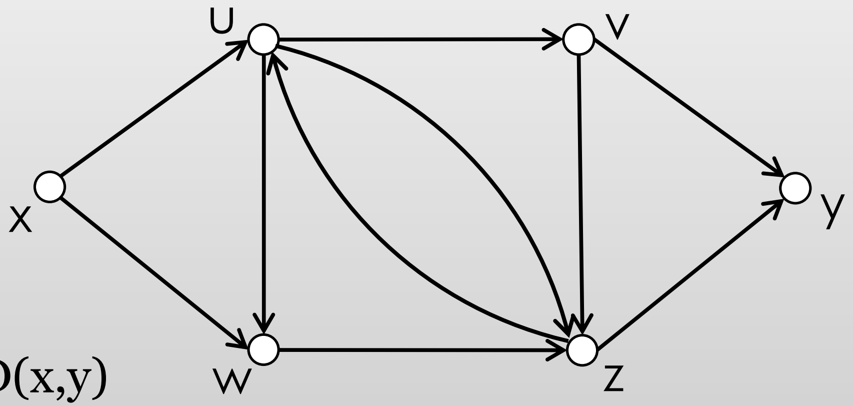
Il significato della riducibilità polinomiale è che se P⩽Q, significa che se Q può essere risolto in tempo polinomiale, allora anche P può essere risolto in tempo polinomiale, dove per tempo polinomiale si intende $O(n^k)$.

$(4)\ \boxed{\preccurlyeq}\ (1)$

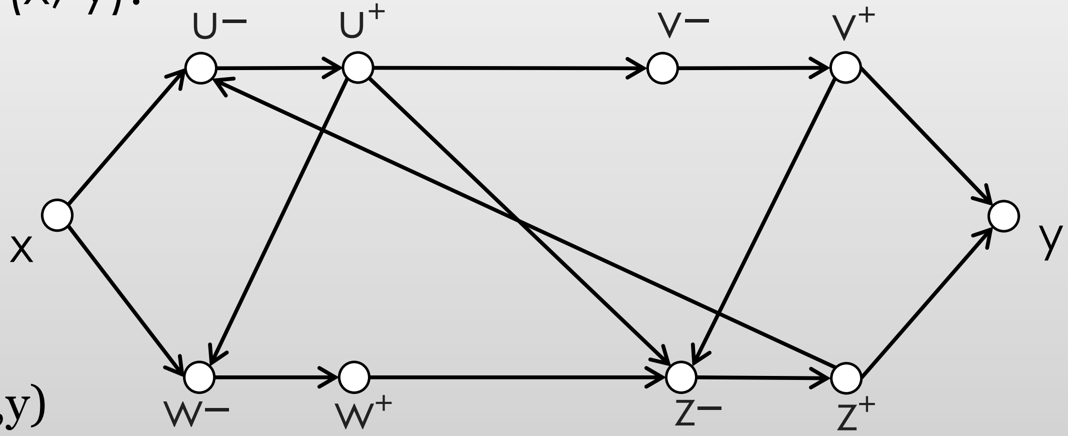
Dato un digrafo $D := D(x, y)$, una riduzione polinomiale $\preccurlyeq$ di cammini internamente disgiunti orientati a cammini arco-disgiunti orientati può essere ottenuta costruendo un nuovo digrafo $D' := D'(x, y)$ da D come segue:

- dividi ogni vertice $v \in V \setminus \{x, y\}$ in due nuovi vertici v^- e v^+, uniti da un nuovo arco (v^-, v^+)
- per ogni arco (u, v) di D, sostituisci la sua coda u con u^+ (a meno che $u = x$ o $u = y$) e la sua testa v con v^- (a meno che $v = x$ o $v = y$).

Si può vedere che esiste una biiezione tra le famiglie di cammini-xy internamente disgiunti orientati in D e famiglie di cammini-xy arco-disgiunti orientati in D', quindi trovare una famiglia massima di cammini-xy internamente disgiunti orientati in $D(x, y)$ **equivale** a trovare una famiglia massima di cammini-xy arco-disgiunti orientati in $D'(x, y)$.



D(x,y)



D'(x,y)

Trovare il **numero massimo di xy-cammini internamente disgiunti** <u>**orientati**</u> **in un digrafo D(x, y)** **può essere ridotto in tempo polinomiale** a quello di trovare il **numero massimo di xy-cammini arco-disgiunti** <u>**orientati**</u> **in un digrafo D'(x, y),** il quale può essere determinato dall'<u>algoritmo Max-Flow-Min-Cut</u>. Pertanto l'algoritmo Max-Flow-Min-Cut può essere utilizzato per trovare anche il numero massimo di xy-cammini internamente disgiunti <u>orientati</u>, **IDDP** $\preccurlyeq$ **ADDP**.

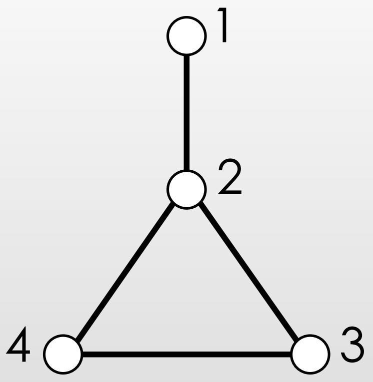
Lo stesso algoritmo restituirà anche un (x, y)-taglio-di-vertici la cui cardinalità è uguale al numero massimo di xy-cammini internamente disgiunti orientati, il che implica la validità del **teorema di Menger (4)** per vertici in grafi orientati.

Osservazione: Visto che (4)→(3), anche **il teorema (3)** dimostrato prima per induzione si può risolvere con l'<u>algoritmo Max-Flow-Min-Cut</u> e lo stesso algoritmo <u>restituirà anche un xy-taglio-di-vertici di cardinalità pari a p(x, y)</u>, numero massimo di xy-cammini internamente disgiunti. Grazie all'implicazione (1)→(2), anche il **teorema (2)** si dimostra con l'algoritmo Max-Flow-Min-Cut.

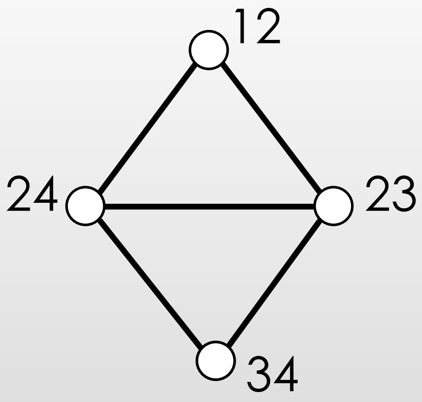
Per dimostrare (3)→(2) si usa il grafo di linea:

Definizione: il **grafo di linea L(G)** di un grafo G è un grafo che rappresenta le adiacenze tra i lati di G. Si costruisce come segue:

- per ogni lato di G, poni un vertice in L(G) 
- per ogni 2 lati di G che hanno un vertice in comune, crea un lato tra i corrispondenti vertici in L(G)



G



L(G)

BIBLIOGRAFIA

- J. A. Bondy – U. S. R Murty, Graph theory
- R. J. Wilson, Introduction to Graph theory
- M. El Joubbeh, Minimal separators in graphs, Lebanese University 2019
- M. Melo, corso di GE460, Università Roma Tre, a.a. 2019/2020
- V. Bonifaci, corso di IN440, Università Roma Tre, a.a. 2019/2020 (http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/vbonifaci/in440/07NetworkFlowII.pdf)