# Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2021/2022

# GE460 - Teoria dei grafi - Esercitazione 1

DOCENTE: MARGARIDA MELO

**Esercizio 1.** *(i) Si dimostri che in un gruppo di almeno due persone, esistono almeno due che hanno lo stesso numero di amici nel gruppo.*

*(ii) Descrivere un gruppo di 5 persone tale che ogni due persone tra loro hanno esattamente un amico in comune. È possibile trovare un gruppo di 4 persone con questa proprietà?*

**Esercizio 2.** *Un "grafo cubo" $Q_k$ è un grafo i cui vertici corrispondono a sequenze $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ di 0 e 1 e tale che i lati corrispondono a vertici le cui etichette differiscono in una sola entrata. Si dimostri che:*

*(i) I grafi $Q_k$ sono bipartiti;*

*(ii) I grafi $Q_k$ hanno $2^k$ vertici, $k2^{k-1}$ lati e sono $k$-regolari.*

**Esercizio 3.** *Si dimostri che:*

*(i) ogni cammino è un grafo bipartito;*

*(ii) un ciclo è bipartito se e soltanto se ha lunghezza pari;*

*(iii) se $G = G[X, Y]$ è bipartito e regolare allora $|X| = |Y|$.*

**Esercizio 4.** *Sia $G$ un grafo semplice. Si dimostri che gli elementi diagonali di entrambe $A^2$ e $MM^T$ sono i gradi dei vertici di $G$.*

**Esercizio 5.** *Si $G$ un grafo. Dimostrare che sono equivalenti:*

*(i) $G$ è connesso;*

*(ii) Per ogni coppia di vertici $u, v \in V(G)$, esiste un cammino che comincia in $u$ e finisce in $v$.*

*(iii) Non è possibile scrivere $G$ come unione disgiunta di grafi non nulli*

$$G = G_1 \cup G_2.$$

**Esercizio 6.** *Sia $G$ un grafo semplice con $n$ vertici e $m$ lati. Si dimostri che:*

*(i) esistono almeno due vertici di $G$ con gradi uguali;*

*(ii) $m \leq \binom{n}{2}$ e determinare quando vale l'uguale;*

*(iii) se $m > \binom{n-1}{2}$ allora $G$ è connesso e dimostrare che il risultato è ottimale.*

*(iv) se $\delta > \frac{n-2}{2}$ allora $G$ è connesso e dimostrare che il risultato è ottimale.*

**Esercizio 7.** *Sia $G$ un grafo con $m$ lati e $n$ vertici e sia $e \in V(G)$ un lato di $G$. Si dimostri che:*

*(i)* *Se $m \geq n$, allora $G$ contiene un ciclo;*

*(ii)* *Se $G$ è aciclico, allora $m = n - c(G)$, dove $c(G)$ indica il numero di componenti connesse di $G$.*

*(iii)* *Se $G$ è connesso e semplice, $n - 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.*

**Esercizio 8.** *Sia $G$ un grafo semplice. Il grafo complementare di $G$ è il grafo $\overline{G}$ con $V(\overline{G}) = V(G)$ e tali che un lato $e = uv$ appartiene a $\overline{G}$ se e solo se non appartiene a $G$. Un grafo semplice si dice auto-complementare se è isomorfo al suo grafo complementare $\overline{G}$.*

*(i)* *Si dimostri che se $G$ è auto-complementare allora $|V(G)| = 4k$ o $4k + 1$, dove $k$ è un intero.*

*(ii)* *Si dimostri che, per un grafo qualsiasi, $Aut(G) \cong Aut(\overline{G})$.*