Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2021/2022

GE460 - Teoria dei grafi - Esercitazione 2

Docente: Margarida Melo

Esercizio 1. *Mostrare che l'unico sottografo pari di un'albero è banale.*

Esercizio 2. *(i) Mostrare che un albero T con grado massimo $\Delta = k$ ha almeno k foglie.*

(ii) Quali di questi alberi hanno esattamente k foglie?

Esercizio 3. *Quanti elementi hanno lo spazio dei cicli e lo spazio dei tagli di un grafo G?*

Esercizio 4. *Mostrare che, in un grafo G, la funzione distanza tra vertici soddisfa la disuguaglianza triangolare, i.e, dati $x, y, z \in V(G)$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.*

Esercizio 5. *Sia G un grafo con n vertici, m lati e c componenti connesse.*

(i) Quanti sottografi generanti ha G?

(ii) Quanti lati è necessario aggiungere a G per ottenere un grafo connesso?

(iii) Quanti sottografi indotti ha G?

Esercizio 6. *Sia G un grafo connesso e sia M la sua matrice di incidenza.*

(i) Mostrare che le colonne di M corrispondenti a un sottoinsieme $S \subset E(G)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{F}_2$ se e soltanto se $G[S]$ è aciclico.

(ii) Dedurre che esiste una corrispondenza biunivoca tra le basi dello spazio delle colonne di M su $\mathbb{F}_2$ e gli alberi generanti di G.

Esercizio 7. *Sia G un grafo connesso e $S \subset E(G)$. Mostrare che sono equivalenti:*

(i) S è un albero generante di G;

(ii) S non contiene alcun ciclo di G ed è massimale relativamente a questa proprietà;

(iii) S interseca ogni taglio di G ed è minimale relativamente a questa proprietà.

Esercizio 8. *Sia G un grafo connesso e $S \subset E(G)$. Mostrare che sono equivalenti:*

(i) S è un co-albero di G;

(ii) S non contiene alcun taglio di G ed è massimale relativamente a questa proprietà;

(iii) *S interseca ogni ciclo di G ed è minimale relativamente a questa proprietà.*

Esercizio 9 (Tree exchange property)**.** *Sia G un grafo connesso, T_1 e T_2 due alberi generanti di G e sia $e \in T_1 \setminus T_2$. Si dimostri che:*

(i) *esiste $f \in T_2 \setminus T_1$ tale che $T_1 \setminus \{e\} \cup \{f\}$ è un albero generante di G;*

(ii) *esiste $f \in T_2 \setminus T_1$ tale che $T_2 \setminus \{f\} \cup \{e\}$ è un albero generante di G;*

Esercizio 10. *Il duale algebrico di un grafo G è un grafo H per il quale esiste una biezione $\theta : E(G) \to E(H)$ mandando ogni ciclo di G in un taglio minimale di H e ogni taglio minimale di G in un ciclo di H.*

(i) *Si mostri che:*

  (a) *l'ottaedro e il cubo sono duali algebrici.*

  (b) *$K_{3,3}$ non ha alcun duale algebrico.*

(ii) *Sia G un grafo connesso che ammette un duale algebrico H connesso, con biezione θ.*

  (a) *Si mostri che T è un'albero generante di G se e soltanto se $\theta(T)$ è un co-albero di H.*

  (b) *Concludere che $t(G) = t(H)$.*

Esercizio 11. *Sia G un grafo connesso con $|V(G)| \geq 3$ e sia e un ponte di G con estremità u e v. Allora o u o v è un vertice di taglio di G.*

Esercizio 12. *Sia G un grafo privo di cappi e sia $v \in V(G)$. Allora v è separante se e solo se è un vertice di taglio.*

Esercizio 13. *Sia G un grafo non separabile e $e \in E(H)$. Allora il grafo ottenuto suddividendo e è ancora nonseparabile.*