Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2021/2022

GE460 - Teoria dei grafi - Esercitazione 4

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. *Sia E un'insieme con 2 elementi e $\mathcal{I} = \{E\}$.*

(i) Discutere se $M = (E, \mathcal{I})$ è una matroide.

(ii) Scrivere tutte le possibili matroidi con insieme basico E e discutere quali tra loro sono isomorfe.

Esercizio 2. *Mostrare che una coppia $(E, \mathcal{I})$ è una matroide se e solo se $\mathcal{I}$ soddisfa $(I2)$ e i seguenti due assiomi:*

- $(I1)'$ $\mathcal{I} \neq \emptyset$
- $(I3)'$ *Se I_1 e I_2 sono elementi di $\mathcal{I}$ con $|I_2| = |I_1| + 1$, allora esiste un'elemento e di $I_2 \setminus I_1$ tale che $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.*

Esercizio 3. *Mostrare che una coppia $(E, \mathcal{I})$ è una matroide se e solo se $\mathcal{I}$ soddisfa $(I1)$, $(I2)$ e il seguente assioma:*
$(I3)''$ *Gli elementi massimali di $\mathcal{I}$ hanno tutti la stessa cardinalità.*

Esercizio 4. *Sia E un'insieme e $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(E)$. Stabilire quali proprietà devono essere soddisfate da $\mathcal{D}$ in modo che sia la collezione dei dipendenti di una matroide M su E.*

Esercizio 5. *Siano M_1 e M_2 matroidi su un'insieme E. Mostrare, con esempi, che $M = (E, \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{I}(M_2))$ non è necessariamente una matroide.*

Esercizio 6. *Mostrare che la matroide $U_{2,4}$ non è binaria e che le matroidi uniformi $U_{2,5}$ e $U_{3,5}$ non sono ternarie.*

Esercizio 7. *Dimostrare che una matroide M è uniforme se e solo se non ha circuiti di cardinalità minore di $r(M) + 1$.*

Esercizio 8. *Sia M una matroide e $T \subset E(M)$ un sottoinsieme del suo insieme basico. Si definiscano le matroidi eliminazione di T, $M(E \setminus T)$, e contrazione di T, $M(E/T)$, entrambe con insieme basico $E \setminus T$ e tali che $\mathcal{C}(M \setminus T) = \{C \in \mathcal{C}(M) : C \cap T = \emptyset\}$ e $\mathcal{C}(M/T)$ sono gli elementi non vuoti minimali di $\{C - T : C \subset \mathcal{C}(M)\}$.*

Esercizio 9. *Sia M una matroide in un'insieme E. Si dimostri che, per qualunque sosttoinsieme X de E,*

$$\mathrm{cl}(X) = X \cup \{x : M \text{ esiste un circuito } C \text{ di } M : x \in C \subset \{X \cup x\}\}.$$

Esercizio 10. *Mostrare che una base di una matroide è un sottoinsieme di $E(M)$ indipendente e generatore.*

Esercizio 11. *(i) Trovare tutte le matroidi avendo un'unica base.*

(ii) Trovare tutte le matroidi avendo un'unico insieme generatore.

Esercizio 12. *Sia $M = M(G)$ una matroide grafica. Allora $H \subset E(G)$ è un'iperpiano se e solo se $E(G) \setminus H$ è minimale tra tutti i sottoinsieme di lati di $E(G)$ la cui rimozione fa aumentare il numero di componenti connesse di G.*