Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2020/2021

GE460 - Teoria dei grafi - Esercizi da consegnare/discutere (foglio 1)

Docente: Margarida Melo

Da consegnare entro: **30/03/2022**

Esercizio 1. *Sia A la matrice di adiacenza di un grafo G. Per definizione, un autovalore di G è un autovalore di A e il polinomio caratteristico di G è il polinomio caratteristico di A. Si dimostri che:*

(i) *tutti gli autovalori di G sono reali e quelli razionali sono interi;*

(ii) *se G è k-regolare, allora k è un autovalore di G con autovettore $\underline{1} = (1, 1, \ldots, 1)$;*

(iii) *nessun autovalore di G ha valore assoluto più grande di Δ;*

Esercizio 2. *Sia M la matrice di incidenza di un grafo G. Si dimostri che il rango di M su $\mathbb{F}_2$ è al più uguale a $n-1$, dove $n = |V(G)|$, con uguaglianza solo se G è connesso.*

Esercizio 3. *Sia D un digrafo con n vertici e m archi. La matrice di incidenza di D è la matrice $M_D = (m_{v,a}) \in M_{n\times m}$ tale che*

$$m_{v,a} = \begin{cases} 1 \text{ se la coda dell'arco } a \text{ è il vertice } v \\ -1 \text{ se la testa dell'arco } a \text{ è il vertice } v \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases} .$$

Si dimostri che

(i) *M_D è totalmente unimodulare (i.e., tutti i suoi minori sono uguali a 1, -1 o 0;*

(ii) *Si concluda che, data una equazione matriciale compatibile $M_D\underline{X} = \underline{b}$, con $\underline{b}$ vettori di interi, esiste una soluzione intera dell'equazione.*

Esercizio 4. *(i)* *Si dimostri che, se esistono due cicli distinti di un grafo G contenendo un certo lato e, allora G ha un ciclo che non contiene e.*

(ii) *Si dimostri un risultato analogo sostituendo "ciclo" con "taglio minimale".*

Esercizio 5. *Un insieme $E \subset E(G)$ di lati di G si dice indipendente se E non contiene alcun ciclo di G. Si dimostri che*

(i) *qualsiasi sottoinsieme di un insieme indipendente è indipendente;*

(ii) *Se I e J sono insiemi indipendenti e $|J| > |I|$, allora esiste un lato e che appartiene a J ma non a I e tale che $I \cup \{e\}$ è ancora indipendente.*

(iii) *Si dimostri che (i) e (ii) rimangono validi sostituendo la parola "ciclo" per "taglio".*

Esercizio 6. *Sia G un grafo e $e \in E(G)$. Si dimostri che:*

(i) $c(G/e) = c(G)$;

(ii) *Se G è aciclico, anche G è aciclico;*

(iii) *Si concluda che $m = n - c$.*

Esercizio 7. *Dato un grafo diretto G e $v \in V(G)$, si denoti con* $\mathrm{indeg(v)}$ *il numero di archi della forma uv e con* $\mathrm{outdeg(v)}$ *il numero di archi della forma vw, con $u, w \in V(G)$. Si dimostri che*

(i) $\sum_{v\in V(G)} \mathrm{indeg(v)} = \sum_{\mathrm{v\in V(G)}} \mathrm{outdeg(v)}$ *(questo risultato è conosciuto come il Handshaking Dilemma).*

(ii) *se G è connesso (come grafo non diretto) allora G è Euleriano (i.e., esiste un ciclo diretto contenendo tutti gli archi di G) se e solo se $\forall v \in V(G), \mathrm{indeg(v)} = \mathrm{outdeg(v)}$.*