

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico
2021/2022
GE460 - Teoria dei grafi - Terzo foglio di esercizi

DOCENTE: MARGARIDA MELO

DA CONSEGNARE PER EMAIL ENTRO: **21/05/2022**

Esercizio 1. Sia G un grafo connesso e consideriamo la decomposizione in blocchi di G . Mostrare che

- (i) G è pari se e solo se ogni blocco di G è pari;
- (ii) G è bipartito se e solo se ogni blocco di G è bipartito;
- (iii) $T \subset G$ è un'albero generante di G se e solo se $T \cap B$ è un'albero generante di B , per ogni blocco B di G .

Esercizio 2 (Connettività per lati). Siano $x, y \in V(G)$ vertici distinti. Definiamo la connettività locale per lati tra x e y , $p'(x, y)$, come il numero massimo di cammini in G tra x e y che non hanno lati in comune. Diciamo poi che un grafo non banale G è k -connesso per lati se $p'(u, v) \geq k$, $\forall u, v \in V(G), u \neq v$. La connettività per lati di un grafo G , che denotiamo con $\kappa'(G)$, è il più grande valore di k tale che G è k -connesso per lati (per convenzione se G è banale $\kappa'(G) = 1$). Si dimostri che

- (i) Un grafo è 1-connesso per lati se e soltanto se è 1-connesso (per vertici).
- (ii) Valgono per qualsiasi grafo G , le disuguaglianze

$$\kappa \leq \kappa' \leq \delta,$$

dove δ è il grado minimo di un vertice di G . In particolare, un grafo k -regolare è, al massimo, k -connesso.

- (iii) Se G è 3-regolare, allora $\kappa = \kappa'$.

Esercizio 3. Sia G un grafo planare connesso e G^* il suo duale (geometrico).

- (i) Mostrare che se G è 3-connesso, allora G^* è semplice.
- (ii) Mostrare che G è bipartito se e solo se G^* è pari.
- (iii) Un taglio minimale di Hamilton di un grafo connesso G è un taglio minimale B tale che tutte le componenti di $G \setminus B$ sono alberi. Sia G un grafo planare che contiene un ciclo di Hamilton C . Mostrare che C^* è un taglio minimale di Hamilton di G^* .

Esercizio 4. Sia G un grafo che ammette un duale algebrico G^* . Mostrare che

- (i) Un sottografo di G ammette un duale algebrico.

(ii) Un grafo omeomorfo a G ammette un duale algebrico (un grafo H si dice omeomorfo a G se G e H hanno suddivisioni isomorfe).

Esercizio 5. Sia G un grafo e \mathcal{C} il suo spazio vettoriale dei cicli. Una base B di \mathcal{C} si dice una 2-base se ogni elemento di B è un ciclo e ogni lato del grafo appartiene al massimo a due di questi cicli. Mostrare che:

(i) se G è planare, G ammette una 2-base;

(ii) K_5 e $K_{3,3}$ non ammettono 2-basi.

(iii) un grafo G è planare se e solo se \mathcal{C} ha una 2-base (questo risultato è un teorema di MacLane). Sug. Usare il teorema di Kuratovski.

Esercizio 6. Si mostri che la matrice di incidenza di un grafo è totalmente unimodulare se e soltanto se il grafo è bipartito.

Esercizio 7. Si dimostri che una matroide M si può definire attraverso un insieme $E \neq \emptyset$ e una collezione \mathcal{C} di sottoinsiemi di M chiamati cicli o circuiti tali che

(i) \emptyset non è un ciclo;

(ii) Un ciclo non contiene propriamente nessun altro ciclo;

(iii) Dati due cicli distinti C_1 e C_2 e un elemento $e \in C_1 \cap C_2$, esiste un ciclo C_3 in $C_1 \cup C_2$ che non contiene e .