Geometria: Primo appello

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza

Nome e Cognome: ________________________________

Numero di Matricola: ________________________

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$S_k : \begin{cases} x_1 + x_3 + kx_4 = k + 1 \\ x_1 - x_2 + kx_4 = 0 \\ x_1 + kx_4 = 0 \end{cases} .$$

(i) Sia $\mathrm{Sol}(S_k) \subset \mathbb{R}^4$ l'insieme delle soluzioni di S_k. Dire per quali valori di k l'insieme S_k è non vuoto.

(ii) Sia ora $k = -1$ e sia $W = \mathrm{Sol}(S_{-1})$. Osservare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e trovare una base per W.

(iii) Sia $U = \mathcal{L}in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$. Il vettore $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a U?

(iv) Determinare una base per $U + W$ e descrivere $U \cap W$.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri l'applicazione $f : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ tale che, data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si ha che $f(A) = \begin{pmatrix} a + b + k \\ c + d + k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(i) Mostrare che f è un'applicazione lineare se e solo se $k = 0$.

(ii) Per $k = 0$, scrivere la matrice associata a f nelle basi canoniche di $M_{2\times 2}$ e di $\mathbb{R}^2$.

(iii) Per $k = 0$, trovare una base di $\mathrm{Im} f$ e una base di $\mathrm{Ker} f$. L'applicazione f è suriettiva?

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(i) Per $k = -2$, stabilire se A è diagonalizzabile.

(ii) Per $k = 2$, determinare gli autovalori di A, la loro molteplicità algebrica e la loro molteplicità geometrica.

(iii) Per $k = 2$, trovare una matrice P ortogonale e una matrice D diagonale tali che $D = P^T AP$.

Esercizio 4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vettori di $\mathbb{R}^2$ non nulli e non proporzionali tra loro. Allora $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ generano $\mathbb{R}^2$.

(ii) Siano A e B matrici $n \times n$ con lo stesso determinante. Allora A e B sono simili.

(iii) Sia $\mathfrak{B}$ una base di $\mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operatore lineare tale che $M_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Allora non esiste alcun vettore non nullo $\overline{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\overline{v}) = 5\overline{v}$.