# Geometria: Primo appello

## Tempo a disposizione: 2 ore e mezza

**Nome e Cognome:** ______________________

**Numero di Matricola:** ______________________

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$S_k : \begin{cases} x_1 + x_3 + kx_4 = k+1 \\ x_1 - x_2 + kx_4 = 0 \\ x_1 + kx_4 = 0 \end{cases} .$$

(i) Sia $\mathrm{Sol}(S_k) \subset \mathbb{R}^4$ l'insieme delle soluzioni di $S_k$. Dire per quali valori di $k$ l'insieme $S_k$ è non vuoto.

(ii) Sia ora $k = -1$ e sia $W = \mathrm{Sol}(S_{-1})$. Osservare che $W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e trovare una base per $W$.

(iii) Sia $U = \mathcal{L}in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$. Il vettore $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U$?

(iv) Determinare una base per $U + W$ e descrivere $U \cap W$.

**Soluzione 1.** (i) La riduzione per righe della matrice completa associata a $S_k$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & k & k+1 \\ 1 & -1 & 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & k & k+1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -k-1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -k-1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, il sistema $S_k$ è sempre compatibile poiché il rango della matrice completa e di quella dei coeffiecienti sono entrambi uguali a 3. In conclusione, per qualsiasi $k$ il sistema $S_k$ ammette soluzioni, per cui $\mathrm{Sol}(S_k)$ è sempre non vuoto.

(ii) Se $k = -1$, il sistema $S_{-1}$ è omogeneo, quindi l'insieme delle soluzioni $\mathrm{Sol}(S_{-1})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Usando la matrice ridotta calcolata in $(i)$, otteniamo che il sistema ridotto associato a $S_{-1}$ è $\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

Quindi $W = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : t \in \mathbb{R} \right\}$ e una base per $W$ è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Per averiguare se $\overline{v} \in U$ dobbiamo considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ le cui colonne corrispondono ai vettori che generano $U$ insieme a $\overline{v}$. Siccome $\mathrm{rk}(A) = 4$ (lo possiamo verificare sia facendo la riduzione a righe di $A$ oppure calcolando il determinante di $A$), otteniamo che la quarta colonna di $A$, che è data da $\overline{v}$, non è combinazione lineare dalle prime tre colonne di $A$, e quindi $\overline{v} \notin U$.

(iv) Siccome $\operatorname{rk} A = 4$, otteniamo che necessariamente $U + V = \mathbb{R}^4$ e che che una base di $U + V$ è data dai vettori che formano le colonne di $A$. (Certamente, essendo $U+V = \mathbb{R}^4$, andrebbe bene qualsiasi altra base di $\mathbb{R}^4$, come la base canonica, ma la base formata dalle colonne di $A$ è più naturale in questo caso).

Infine, usando il fatto che $\dim U + \dim V = \dim(U+V) + \dim(U \cap V)$, otteniamo che $\dim(U \cap V) = 0$, per cui $U \cap V = \{\overline{0}\}$.

**Esercizio 2.** Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri l'applicazione $f : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ tale che, data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si ha che $f(A) = \begin{pmatrix} a+b+k \\ c+d+k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(i) Mostrare che $f$ è un'applicazione lineare se e solo se $k = 0$.

(ii) Per $k = 0$, scrivere la matrice associata a $f$ nelle basi canoniche di $M_{2\times 2}$ e di $\mathbb{R}^2$.

(iii) Per $k = 0$, trovare una base di $\operatorname{Im} f$ e una base di $\operatorname{Ker} f$. L'applicazione $f$ è suriettiva?

**Soluzione 2.** (i) Cominciamo per osservare che se $k \neq 0$, allora $f$ non è un'applicazione lineare poiché $f(\overline{0}) = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} \neq \overline{0}$. Reciprocamente, nel caso in cui $k = 0$, abbiamo che date matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(A + A') = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = f(A) + f(A')$$

e

$$f(\lambda A) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda f(A).$$

(ii) Per determinare la matrice richiesta bisogna calcolare le immagine delle matrici $E_{i,j} \in M_{2\times 2}$, dove $E_{i,j}$ è la matrice che ha 1 nel termine $(i,j)$ e 0 altrove.

Essendo $k = 0$ abbiamo quindi: $f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, per cui la matrice di $f$ nelle basi canoniche di $M_{2\times 2}$ e di $\mathbb{R}^2$ è la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Essendo il rango della matrice $M$ uguale a 2 ($M$ è già ridotta per righe), la dimensione dell'immagine di $f$ è uguale a 2, per cui $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^2$ già che è um sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 2. Quindi, qualunque base di $\mathbb{R}^2$ è una base di $\operatorname{im} f$, come ad esempio la base canonica di $\mathbb{R}^2$. In particolare, l'applicazione $f$ è suriettiva.

Per quanto riguarda $\ker f$, sappiamo che è un sottospazio di $M_{2\times 2}$ di dimensione 2 già che

$$4 = \dim M_{2\times 2} = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = 2 + \dim \ker f.$$

Per determinare una base per $\ker f$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo che ha $M$ come matrice dei coefficienti. Le soluzioni di questo sistema sono date da Usando la matrice ridotta calcolata in $(i)$, otteniamo che il sistema ridotto associato a $\ker f$ è $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$. Di conseguenza, una base per $\ker f$ è data da $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$.

**Esercizio 3.** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(i) Per $k = -2$, stabilire se $A$ è diagonalizzabile.

(ii) Per $k = 2$, determinare gli autovalori di $A$, la loro molteplicità algebrica e la loro molteplicità geometrica.

(iii) Per $k = 2$, trovare una matrice $P$ ortogonale e una matrice $D$ diagonale tali che $D = P^T AP$.

**Soluzione 3.** (i) Sia $k = -2$. Per stabilire se $A$ è diagonallizzabile determiniamo gli autovalori della matrice attraverso il polinomio caratteristico, ossia calcoliamo

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)[(1-\lambda)^2 + 4].$$

Siccome $(1-\lambda)^2 + 4$ non ammette radici reali, concludiamo che $p_A$ non è totalmente riducibile, per cui la matrice non è diagonalizzabile per il secondo teorema di diagonalizzabilità (ossia, abbiamo solo un autovalore reale, che è $\lambda = -1$, con molteplicità algebrica uguale a 1, ma una matrice diagonalizzabile di ordine 3 dovrebbe avere autovalori le cui molteplicità algebriche sommano a 3).

(ii) Sia $k = 2$. In questo caso la matrice è simmetrica, per cui, per il teorema spettrale, è sicuramente diagonalizzabile. Per trovare gli autovalori di $A$ calcoliamo le radici del polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = -(1+\lambda)[(\lambda+1)(\lambda-3)] =$$
$$= -(\lambda+1)^2(\lambda-3).$$

Quindi, gli autovalori di $A$ in questo caso sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$, con le seguenti molteplicità algebriche e geometriche:

$m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1) = 2$

e

$m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2) = 1$.

Per determinare le molteplicità geometriche abbiamo usato il fatto che, essendo la matrice simmetrica, è diagonalizzabile, quindi le molteplicità algebriche e geometriche devono per forza coincidere per il primo teorema di diagonalizzabilità.

(iii) Per trovare la matrice $P$, dobbiamo cominciare per determinare una base di autovettori di $A$. Per determinare l'autospazio $V_{\lambda_1}$ associato all'autovalore $\lambda_1 = -1$ dobbiamo risolvere il sistema

$\begin{cases} 0=0 \\ 2x_2+2x_3=0 \\ 2x_2+2x_3=0 \end{cases}$, che ha come spazio di soluzioni $V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ -s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t, s \in \mathbb{R} \right\}$. Una base per $V_{\lambda_1}$ è quindi data dai vettori $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Per determinare l'autospazio $V_{\lambda_2}$ associato all'autovalore $\lambda_2 = 3$ dobbiamo risolvere il sistema $\begin{cases} -4x_1=0 \\ -2x_2+2x_3=0 \\ 2x_2-2x_3=0 \end{cases}$ che ha come spazio di soluzioni $V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}$. Una base per $V_{\lambda_2}$ è quindi data dal vettore $\overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quindi una base di autovettori di $A$ è data da $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Osservando che questi vettori sono già perpendicolari due a due, per formare la matrice $P$ bisogna normalizzarli: $\overline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ e $\overline{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Essendo quindi $\overline{w}_1, \overline{w}_2$ e $\overline{w}_3$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, la matrice che ha loro come colonne è ortogonale.

In conclusione, abbiamo quindi che la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale formata da auovettori di $A$ e che $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è la matrice diagonale formata dagli autovalori di $A$, per cui si ha che $D = P^T AP$.

**Esercizio 4.** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vettori di $\mathbb{R}^2$ non nulli e non proporzionali tra loro. Allora $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ generano $\mathbb{R}^2$.

(ii) Siano $A$ e $B$ matrici $n \times n$ con lo stesso determinante. Allora $A$ e $B$ sono simili.

(iii) Sia $\mathfrak{B}$ una base di $\mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operatore lineare tale che $M_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Allora non esiste alcun vettore non nullo $\overline{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\overline{v}) = 5\overline{v}$.

**Soluzione 4.** (i) L'affermazione è VERA. Infatti, per generare $\mathbb{R}^2$, che ha dimensione 2, servono due vettori linearmente indipendenti. Essendo $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ e $\overline{v}_3$ non proporzionali a due a due, sono a due a due linearmente indipendenti, per cui ne bastano anche due di loro per generare $\mathbb{R}^2$. In conclusione, abbiamo che, infatti, $\mathcal{L}in(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = \mathcal{L}in(\overline{v}_1, \overline{v}_2) = \mathbb{R}^2$.

(ii) L'affermazione è FALSA. È in generale vero che due matrici simili hanno lo stesso determinante, ma non è vero che se due matrici hanno lo stesso determinante allora siano simili. Ad esempio, basta considerare le matrici $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice $O$ è la matrice nulla, che è simile solo a se stessa, quindi non è simile alla matrice $B$, anche se entrambe hanno determinante uguale a zero.

oss. Potremo anche concludere usando il fatto che le due matrici hanno autovalori diversi, mentre la relazione di similitudine preserva il polinomio caratteristico (e quindi gli autovalori).

(iii) L'affermazione è VERA. Infatti, se esistesse un vettore non nullo $\overline{v}$ tale che $f(\overline{v}) = 5\overline{v}$, avremo che $\overline{v}$ sarebbe un'autovettore di $f$ con autovalore 5. D'altra parte, la matrice data ha autovalori 3 e 4, per cui 5 non è un autovalore di $f$.