Geometria: Secondo appello

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza

Nome e Cognome: ______________________________

Numero di Matricola: ______________________________

Esercizio 1. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$
dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, e sia W l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$.

(i) Determinare la dimensione di W al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Si consideri il vettore $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per $k = 3$, determinare tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$.

(iii) Si fissi ora $k = 3$ e si consideri il sottospazio $U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Determinare la dimensione di $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $f : M(2\times2,\mathbb{R}) \to M(2\times2,\mathbb{R})$ definita da $f(A) = A^T - 2A$, dove A^T indica la matrice trasposta di A.

(i) Trovare la matrice associata a f nella base canonica di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(ii) Determinare $\mathrm{Ker}f$ e $\mathrm{Im}f$.

(iii) Sia $W := \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \,|\, f(A) = -A\}$; dire se W è un sottospazio vettoriale di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ motivando la risposta.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ k & 0 & 4 \end{pmatrix}$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(i) Per $k = 0$, stabilire se A è diagonalizzabile.

(ii) Per $k = 1$, determinare gli autovalori di A, la loro molteplicità algebrica e la loro molteplicità geometrica.

(iii) Per $k = 1$, trovare una matrice C ortogonale e una matrice D diagonale tali che $D = C^T AC$.

Esercizio 4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Sia $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ una matrice quadrata tale che $A^k = I$ per qualche intero $k \geq 1$. Allora A è invertibile.

(ii) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = 5$ e $\dim W = 3$. Allora il nucleo di ogni applicazione lineare $f : V \to W$ ha dimensione 2.

(iii) Sia $f : V \to V$ un operatore lineare. Allora la somma di due autovettori di f è ancora un autovettore di f.