Geometria: Secondo appello

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza

Nome e Cognome: ______________________________

Numero di Matricola: ______________________________

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, e sia W l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$.

(i) Determinare la dimensione di W al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Si consideri il vettore $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per $k = 3$, determinare tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$.

(iii) Si fissi ora $k = 3$ e si consideri il sottospazio $U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Determinare la dimensione di $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.

Soluzione 1. (i) Per determinare la dimensione di W possiamo cominciare per determinare il rango di A. Applicando ad A l'algoritmo di Gauss-Jordan otteniamo la seguente matrice ridotta per righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix}$$

e quindi concludiamo che il rango di A è uguale a 1 se $k = 3$ ed è uguale a 2 se $k \neq 3$. Otteniamo quindi che

$$\dim W = \begin{cases} 3 - 1 = 2 \text{ se } k = 3 \\ 3 - 2 = 1 \text{ se } k \neq 3. \end{cases}$$

(ii) Per $k = 3$, otteniamo dall'esercizio precedente che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una riduzione per righe della matrice A, per cui il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente al sistema di una sola equazione dato da $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. Quindi possiamo scrivere le soluzioni del sistema omogeneo ad esempio come segue $W = \left\{ \begin{pmatrix} -2t - 3s \\ t \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Invece per quanto riguarda il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, applichiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan alla matrice completa associata, e otteniamo la seguente matrice ridotta per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, l'insieme selle soluzioni si scrive analogamente a quanto fatto per il sistema omogeneo in questo modo $\left\{ \begin{pmatrix} 1-2t-3s \\ t \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t, s \in \mathbb{R} \right\}$.

(iii) Per $k = 3$ e per quanto abbiamo visto nel punto precedente abbiamo che $W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, quindi osserviamo immediatamente che uno dei vettori generatori di U, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a W.

Lo spazio vettoriale $U + W$ è quindi generato dai vettori che compongono le colonne della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siccome il rango di questa matrice è chiaramente uguale a 3, otteniamo che $U + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3, e quindi è uguale a tutto $\mathbb{R}^3$.

Per determinare $U \cap W$ usiamo quindi la formula di Grassmann e otteniamo che

dim$U \cap W$=dim$U$+dim$W$-dim$U \cup W$ $= 2 + 2 - 3 = 1$. Sapevamo già che il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene ad $U \cap W$, e quindi otteniamo che $U \cap W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $f : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to M(2\times 2, \mathbb{R})$ definita da $f(A) = A^T - 2A$, dove A^T indica la matrice trasposta di A.

(i) Trovare la matrice associata a f nella base canonica di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(ii) Determinare Ker$f$ e Imf.

(iii) Sia $W := \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid f(A) = -A\}$; dire se W è un sottospazio vettoriale di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ motivando la risposta.

Soluzione 2. (i) Per determinare la matrice richiesta bisogna calcolare le immagine delle matrici $E_{i,j} \in M_{2\times 2}$, dove $E_{i,j}$ è la matrice che ha 1 nel termine (i, j) e 0 altrove.

Essendo $k = 0$ abbiamo quindi: $f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, per cui la matrice di f nella base canoniche di $M_{2\times 2}$ è la seguente matrice 4×4

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Per calcolare $\ker f$ determiniamo il rango della matrice M, che si vede facilmente essere uguale a 4. Quindi la matrice M definisce una applicazione iniettiva, ossia $\ker f = \{\overline{0}\}$. Per determinare $\dim(\mathrm{Im} f)$ usiamo la formula:

$$\dim(\mathrm{Imf}) = \dim(\mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R})) - \dim(\ker(\mathrm{f})) = 4 - 0 = 4.$$

Quindi f è suriettiva, per cui $\mathrm{Im} f = M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(iii) Tenendo conto della definizione di f, possiamo scrivere

$$W := \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid f(A) = -A\} = \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid A = A^T\},$$

ossia, W è l'insieme delle matrici simmetriche. Ora osserviamo che W infatti è un sottospazio di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ già che la somma di matrici simmetriche è ancora una matrice simmetrica e il prodotto di uno scalare per una matrice simmetrica è ancora una matrice simmetrica.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ k & 0 & 4 \end{pmatrix}$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(i) Per $k = 0$, stabilire se A è diagonalizzabile.

(ii) Per $k = 1$, determinare gli autovalori di A, la loro molteplicità algebrica e la loro molteplicità geometrica.

(iii) Per $k = 1$, trovare una matrice C ortogonale e una matrice D diagonale tali che $D = C^T AC$.

Soluzione 3. (i) Se $k = 0$ il polinomio caratteristico di A è $p_0(\lambda) = (4 - \lambda)^3$, quindi A ha $\lambda = 4$ come unico autovalore, di molteplicità 3. Siccome invece il rango della matrice $A - 4I$ è uguale a 1, l'autospazio associato ha dimensione 2, e quindi la molteplicità algebrica di $\lambda = 4$ è uguale a $2 < 3 = m_g(4)$. Concludiamo quindi che se $k = 0$, A non è diagonalizzabile.

(ii) Per $k = 1$ la matrice A è simmetrica, e quindi sicuramente diagonalizzabile. Infatti il polinomio caratteristico di A in questo caso è uguale a $(4 - \lambda)^3 - (\lambda - 4) = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = (4 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 5)$. Abbiamo quindi che la matrice A ha 3 autovettori distinti: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 5$, ognuno con molteplicità algebrica uguale a 1, e quindi con molteplicità geometrica anche essa uguale a 1.

(iii) Per trovare la matrice ortogonale richiesta calcoliamo una base per ciascun autospazio di A. Per determinare V_3, l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = 3$, dobbiamo risolvere il sistema $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$, che ha come spazio di soluzioni $V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Analogamente otteniamo che $V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e che $V_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Essendo questi autovettori associati a autovalori diversi di una matrice simmetrica sono necessariamente ortogonali, quindi per trovare la matrice ortogonale C richiesta basta normalizzare questi vettori. Otteniamo quindi

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

mentre invece la matrice D è la matrice che ha come elementi diagonali gli autovalori associati:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Sia $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ una matrice quadrata tale che $A^k = I$ per qualche intero $k \geq 1$. Allora A è invertibile.

(ii) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = 5$ e $\dim W = 3$. Allora il nucleo di ogni applicazione lineare $f : V \to W$ ha dimensione 2.

(iii) Sia $f : V \to V$ un operatore lineare. Allora la somma di due autovettori di f è ancora un autovettore di f.

Soluzione 4. (i) L'affermazione è vera. Infatti, se $A^k = I$, con $k > 1$, abbiamo che $A^{k-1} \times A = A^k = I = A \times A^{k-1}$, ossia A è invertibile e $A^{-1} = A^{k-1}$.

(ii) L'affermazione è falsa. Consideriamo ad esempio l'applicazione nulla $f = 0$. Allora il nucleo di f è tutto lo spazio di partenza V, che ha dimensione 5 e non 2.

(iii) L'affermazione è falsa. Infatti la somma di due autovettori con lo stesso autovalore è ancora un autovettore, ma la somma di due autovettori associati a due autovalori diversi non è un autovettore. Consideriamo ad esempio la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Allora il vettore $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un'autovettore di A associato all'autovalore 1 e il vettore $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un'autovettore di A associato all'autovalore 2. Invece vediamo facilmente che il vettore $\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è un'autovettore di A poiché $A\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$.