Geometria: Terzo appello

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza

Nome e Cognome: ______________________________

Numero di Matricola: ______________________________

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$S : \begin{cases} 2x_1 + kx_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_2 = k \\ 2x_2 + kx_3 = 0 \end{cases} .$$

(i) Dire per quali valori di k il sistema è compatibile e per quali valori di k la soluzione del sistema è unica.

(ii) Si fissi ora $k = 0$. Determinare l'insieme delle soluzioni di S, e una base $\mathcal{B}$ del sottospazio W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a S.

(iii) Completare $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Dato il vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, si consideri l'applicazione lineare $f : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(A) = A\underline{v}$.

(i) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica di $M(2\times 2, \mathbb{R})$ in partenza e nella base canonica di $\mathbb{R}^2$ in arrivo.

(ii) Determinare una base di $\mathrm{Ker}f$ e una base di $\mathrm{Im}f$.

(iii) Sia $\mathcal{A}_2$ il sottospazio delle matrici antisimmetriche in $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Determinare il sottospazio intersezione $(\mathrm{Ker}f) \cap \mathcal{A}_2$ e il sottospazio somma $(\mathrm{Ker}f) + \mathcal{A}_2$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(i) Per $k = 0$, stabilire se A è diagonalizzabile.

(ii) Per $k = 1$, determinare gli autovalori di A, la loro molteplicità algebrica e la loro molteplicità geometrica.

(iii) Per $k = 1$, trovare una matrice C ortogonale e una matrice D diagonale tali che $D = C^T AC$.

Esercizio 4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

(ii) Ogni applicazione lineare $f : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ è suriettiva.

(iii) Sia $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ una matrice di rango 1. Allora 0 è un autovalore di A.