Geometria: Quarto appello

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza

Nome e Cognome: ____________________________

Numero di Matricola: ____________________________

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (k^2 - 5)x_3 = k \end{cases} .$$

(i) Dire per quali valori di k il sistema è compatibile e per quali valori di k il sistema ha infinite soluzioni.

(ii) Si fissi ora $k = 2$. Determinare l'insieme delle soluzioni di S, e una base $\mathcal{B}$ del sottospazio W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a S.

(iii) Sia $U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Determinare $U \cap W$ e $U + W$.

Esercizio 2. Sia P^2 lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a due e sia $f : P^2 \to P^2$ tale che $f(p(x)) = p'(x) + x^2 p(0)$.

(i) Mostrare che f è un'operatore lineare.

(ii) Trovare la matrice M associata a f nella base canonica $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ e, usando M, l'immagine tramite f del polinomio $2x^2 - 3$.

(iii) Determinare $\text{Ker} f$ e una base di $\text{Im} f$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(i) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile.

(ii) Per $k = 1$, determinare gli autovalori di A, la loro molteplicità algebrica e la loro molteplicità geometrica.

(iii) Per $k = 1$, trovare una matrice C ortogonale e una matrice D diagonale tali che $D = C^T AC$.

Esercizio 4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Ogni matrice invertibile ha determinante uguale a 1.

(ii) Non esiste alcuna base dello spazio delle matrici $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ fatto da matrici simmetriche.

(iii) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'operatore lineare il cui polinomio caratteristico è $P_f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$. Allora f non è iniettivo.