Geometria
Esercizi introduttivi

Esercizio 1. Siano A e B due insiemi. Dimostrare che $A \cup B = B$ se e solo se $A \subset B$.

Esercizio 2. Siano A e B due insiemi. Dimostrare le uguaglianze $A \cup (A \cap B) = A$ e $A \cap (A \cup B) = A$.

Esercizio 3. Sia $\mathrm{Sol}(S)$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $S : \begin{cases} x + 3y + z &= 4 \\ x + y + z &= 6 \end{cases}$.

(i) Dire quali dei seguenti vettori appartengono a $\mathrm{Sol}(S)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(ii) Dire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente vettore appartiene a $\mathrm{Sol}(S)$: $\begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$.

(ii) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il seguente vettore appartiene ad $\mathrm{Sol}(S)$: $\begin{pmatrix} 7-h \\ -1 \\ h \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Dato un sistema omogeneo, la somma di due sue soluzioni è ancora una sua soluzione.

(ii) Dato un sistema omogeneo, il prodotto di una sua soluzione per un qualsiasi scalare è ancora una sua soluzione.

(ii) Dato un sistema lineare qualunque, la somma di due sue soluzioni è ancora una sua soluzione.

(iii) Dato un sistema lineare qualunque, il prodotto di una sua soluzione per un qualsiasi scalare è ancora una sua soluzione.

Esercizio 5. Dire per quali valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ le seguenti matrici sono a scala:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k & k \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$;

(iii) $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & k & k \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) La trasposta di una matrice simmetrica è antisimmetrica.

(ii) L'unica matrice di ordine n contemporaneamente simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla di ordine n.

(iii) Ogni matrice diagonale è a scala.

(iv) Ogni matrice a scala è triangolare superiore.

(v) Ogni matrice triangolare superiore è a scala.