Geometria

Esercizi su diagonalizzazione a prodotto scalare

Esercizio 1. Si considerino le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare gli autovalori di ciascuna matrice e la loro molteplicità geometrica. Dire quali matrici sono diagonalizzabili.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ l'operatore lineare definito da $f(p(x)) = p(2-x)$, cioè p calcolato in $2-x$.

(i) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$.

(ii) Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori di f e la loro molteplicità geometrica.

(iii) Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, esibire una base di autovettori.

Esercizio 3. Si consideri l'operatore lineare $f : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R})$ definito da $f(A) = A - A^T$.

(i) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica.

(ii) Trovare una base per il nucleo di f e una base per l'immagine di f.

(iii) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.

(iv) Stabilire se f è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Si consideri l'operatore lineare $g : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ definito da $g(p(x)) = p(2) - 2p'(x)$.

(i) Scrivere la matrice associata a g nella base canonica.

(ii) Determinare le dimensione del nucleo e dell'immagine di g.

(iii) Calcolare gli autovalori di g e la loro molteplicità algebrica.

(iv) Stabilire se g è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Per ciascuna delle seguenti matrici simmetriche A, trovare una matrice D diagonale e una matrice P ortogonale tali che $D = P^T AP$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Al variare di $\Theta \in [0, 2\pi]$, si consideri la seguente matrice (detta *matrice di rotazione di angolo* Θ):

$$R_\Theta = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che R_Θ è una matrice ortogonale.

(ii) Verificare se R_Θ è diagonalizzabile e, incaso affermativo, esibire una bse di autovettori di R_Θ.

Esercizio 7. Al variare di $\Theta \in [0, 2\pi]$, si consideri la seguente matrice (detta *simmetria assiale il cui asse forma un angolo* $\Theta/2$ *con l'asse delle ascisse*):

$$S_\Theta = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Theta & -\cos\Theta \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che S_Θ è una matrice ortogonale.

(ii) Verificare se S_Θ è diagonalizzabile e, incaso affermativo, esibire una bse di autovettori di R_Θ.

Esercizio 8. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e sia $W = \mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.

(i) Calcolare la dimensione di W ed esprimere W in forma cartesiana.

(ii) Trovare una base ortonormale di W.

(iii) Completare la base trovata ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 9. Dimostrare che una matrice $P \in M(n \times n, \mathbb{R})$ è ortogonale se e solo se $\|P\underline{v}\| = \|\underline{v}\|$ per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 10. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Sia $f : V \to V$ un operatore lineare il cui nucleo ha dimensione $n-1$ e che ha un autovalore $\lambda \neq 0$. Allora f è diagonalizzabile.

(ii) Sia A una matrice quadrata. Se A è diagonalizzabile allora A^k è diagonalizzabile per ogni $k \geq 1$.

(iii) Sia P una matrice ortogonale. Allora $\det P = \pm 1$.

(iv) Ogni matrice invertibile è simile a una matrice ortogonale.

(v) Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile.