

Geometria

Esercizi 2

Esercizio 1. Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ due matrici 2×2 . Trovare l'unica matrice $X \in M_{2 \times 2}$ che soddisfa $2A - X = 4B$.

Esercizio 2. Decomporre la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ nella somma di una matrice simmetrica e una matrice antisimmetrica.

Esercizio 3. Dati n numeri reali r_1, \dots, r_n , consideriamo la matrice $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}$, tale che $a_{ij} = (-1)^{i+j} r_i r_j$.

(i) È vero che A è simmetrica?

(ii) Scrivere esplicitamente tale matrice se $r_1 = 0, r_2 = 2, r_3 = -1, r_4 = 1$.

Esercizio 4. Per ciascuna delle seguenti matrici, trovare la sua riduzione a scala.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Considerare i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y e z :

$$S_1 : \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}, \quad S_3 : \begin{cases} y - 3z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}.$$

Scrivere per ciascun sistema la matrice completa associata e, dopo aver trovato una sua riduzione per righe, stabilire se il sistema è compatibile e, in quel caso, esibire tutte le sue soluzioni.

Esercizio 6. Per ciascuna delle matrici dell'esercizio 4, scrivere un sistema di equazioni lineari la cui matrice completa associata sia la matrice considerata e, usando la riduzione a righe fatta nell'esercizio 4, risolvere i rispettivi sistemi.

Esercizio 7. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Data una matrice A , la matrice $B := A + {}^t A$ è sempre una matrice simmetrica

(ii) Un sistema lineare in 2 equazioni e 4 incognite è sempre compatibile.

(iii) Un sistema lineare in 4 equazioni e 2 incognite è sempre incompatibile.

(iv) Un sistema lineare in 2 equazioni e 2 incognite ha sempre una soluzione unica.

(v) Un sistema lineare in 2 equazioni e 3 incognite, se compatibile, ha sempre un'infinità di soluzioni.