Geometria

Esercizi su inverse di matrici e rango

Esercizio 1. Sia $A \in M_{n\times n}$ una matrice quadrata. Mostrare che la matrice A^tA è una matrice simmetrica.

Esercizio 2. Siano dati i sistemi

$$S_1 : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}, \quad S_3 : \begin{cases} 6x + 3y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases},$$

$$S_4 : \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}, \quad S_5 : \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \quad S_6 : \begin{cases} x - 3z = 1 \\ y + 2z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{cases}.$$

Per ciascuno dei sistemi, trovare l'insieme delle soluzioni:

(i) Usando il metodo di riduzione a righe della matrice completa;

(ii) Scrivendo il sistema in forma matriciale e, caso esista, usando l'inversa della matrice dei coefficienti.

Esercizio 3. Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ due matrici 2×2. Trovare, se esiste, una matrice $X \in M_{2\times 2}$ che soddisfa $AX = B$. Tale matrice, caso esista, è unica?

Esercizio 4. Stabilire per quali valori di h la matrice $A(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1-h \\ 3 & h & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile.

Esercizio 5. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Risolvere le seguenti equazioni matriciali nelle indeterminate $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, indicando in ciascun caso l'insieme delle soluzioni.

(i) $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $AX = -X$;

(iii) $AX = 2X$;

(iv) $AX = 2X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(v) Determinare tutti i numeri $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $AX = \lambda X$ ammette soluzioni $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6. Calcolare il rango delle seguenti matrici.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Sia $A \in M_{n\times n}$ la matrice dei coefficienti di un sistema S. Allora se A non è invertibile, S non ha soluzioni.

(ii) Il rango di un matrice diagonale A è uguale al numero di termini non nulli di A.

(iii) Il rango di una matrice è uguale al rango della sua trasposta.

(iv) Il rango di un prodotto di matrici è uguale al prodotto dei loro ranghi.