Geometria

Esercizi sui determinanti

Esercizio 1. Sia $A \in M_{n\times n}$ una matrice quadrata. Mostrare che:

(i) se A ha due righe proporzionali allora $\det(A) = 0$;

(ii) se una riga di A è somma di altre due righe di A, allora $\det(A) = 0$;

Esercizio 2. Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 12 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare i loro determinanti:

(i) Utilizzando uno sviluppo di Laplace.

(ii) Utilizzando la riduzione a scala.

Esercizio 3. Dire se le matrici dell'esercizio 1 sono invertibili. In caso affermativo, calcolare la loro inversa:

(i) Utilizzando il metodo dei cofattori.

(ii) Utilizzando l'algoritmo di Gauss-Jordan.

Esercizio 4. Determinare i valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ per cui la matrice $A(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & h & h \\ 1 & h & 0 & h \\ 1 & h & h & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile, calcolandone il determinante.

Esercizio 5. Verificare se i seguenti sistemi ammettono un'unica soluzione e, in caso affermativo, usare la regola di Cramer per calcolarla:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5x + y - z = -3 \\ 2x - y - 2z = 6 \\ 3x + 2z = -7 \end{cases}.$$

Esercizio 6. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Dimostrare che

(i) $\det(-A) = (-1)^n \det A$;

(ii) $\det(A) \neq 0$ se e solo se $\det(A^t) \neq 0$.

Esercizio 7. (i) Dimostrare che ogni matrice antisimmetrica di ordine 3 ha determinante nullo.

(ii) Dimostrare che ogni matrice antisimmetrica di ordine dispari ha determinante nullo *(Suggerimento: usare l'esercizio precedente).*

(iii) Far vedere con un esempio che il determinante di una matrice antisimmetrica di ordine pari non è necessariamente nullo.

Esercizio 8. Sia A una matrice quadrata tale che $A^2 = A$. Quali valori può assumere $\det A$? *(Suggerimento: usare il Teorema di Binet).*

Esercizio 9. Siano A e B matrici quadrate di ordine n. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) $\det(A + B^T) = \det(A^T + B)$.

(ii) $\det(AB) = \det(B^T A)$.

(iii) Se $A^2 = 0$, allora $\det A = 0$

(iv) $\det(A^T A) \geq 0$.

(v) $\det(A^T A) > 0$.