Geometria

Esercizi su spazi vettoriali, sottospazi e indipendenza lineare

Esercizio 1. Siano dati i seguenti sottoinsiemi di spazi vettoriali. Si discuta, giustificando, in quali casi si tratta di sottospazi.

(i) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$.

(ii) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.

(iii) $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\}$.

(iv) Il piano D di $\mathbb{R}^3$ di equazione $ax + by + cz = 0$, con a, b e c costanti non tutte nulle.

(v) Il piano E di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y + z = 1$.

(vi) Il sottoinsieme F di $\mathbb{R}^3$ dato dall'unione del piano $z = 0$ con l'asse $OZ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$.

(vii) L'insieme G dei polinomi di grado minore o uguale a $d \in \mathbb{N}$.

(viii) L'insieme H dei polinomi di grado totale pari.

(ix) L'insieme K delle matrici quadrate $n \times n$ invertibili.

(x) L'insieme L delle matrici quadrate $n \times n$ con termini diagonali tutti uguali.

(xi) L'insieme M delle matrici quadrate $n \times n$, $a_{i,j}$, con $a_{i,j} = 0$ se $i \leq j$.

Esercizio 2. Determinare, stabilendo se siano sottospazzi, i seguenti insiemi usando la notazione utilizzata nell'esercizio precedente:

(i) $A \cap B$;

(ii) $D \cap E$;

(iii) $G + H$;

(iv) $K \cap L$;

(v) $L \cap M$;

(vi) $L + M$.

Esercizio 3. Siano $\overline{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) I vettori $\overline{v}_1, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ sono linearmente dipendenti?

(ii) Esprimere, se possibile, $\overline{v}_3$ come combinazione lineare di $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_2$.

Esercizio 4. Siano $\overline{v_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\overline{v_2} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ vettori di $\mathbb{R}^2$.

Mostrare che $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_2$ sono linearmente indipendenti se e solo se $ad - bc \neq 0$.

Esercizio 5. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, mostrare che le sue righe sono linearmente indipendenti mentre le sue colonne sono linearmente dipendenti.

Esercizio 6. Per quali valori di t, r, s sono linearmente indipendenti i vettori

$$\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{v_3} = \begin{pmatrix} t \\ r \\ s \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti:

$$\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ e $\overline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

(ii) Esprimere $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ e $\overline{v}_3$.

Esercizio 9. Siano $\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\overline{v_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vettori di $\mathbb{R}^2$. Determinare, a seconda dei valori di a e b, lo spazio $\mathcal{L}in(\overline{v}_1, \overline{v}_2) \subset \mathbb{R}^2$.

Esercizio 10. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Stabilire se i vettori $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ e $\overline{v}_4$ sono linearmente indipendenti e, in caso negativo, esibire uno di loro come combinazione lineare degli altri due;

(ii) Determinare $\mathcal{L}in(\overline{v}_1)$, $\mathcal{L}in(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$ e $\mathcal{L}in(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$.