Geometria

Esercizi sulle basi di spazi e sottospazi vettoriali

Esercizio 1. Sia W l'insieme delle matrici A quadrate di ordine 2 tali che la prima colonna di A è uguale alla seconda colonna di A.

(i) Dimostrare che W è un sottospazio di $M_{2\times 2}$.

(ii) Calcolare la dimensione di W esibendone una base.

Esercizio 2. Sia W l'insieme dei polinomi $p(x)$ di grado $\leq n$ tali che che $p(x) = 0$.

(i) Dimostrare che W è un sottospazio di P^n, lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale ad n.

(ii) Calcolare la dimensione di W esibendone una base.

Esercizio 3. Sia W l'insieme dei polinomi $p(x)$ di grado ≤ 2 tali che che $p(x) = p(-x)$.

(i) Dimostrare che W è un sottospazio di P^2.

(ii) Calcolare la dimensione di W esibendone una base.

Esercizio 4. Si consideri la matrice $A(k) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 2 & 0 & 1 \\ k & 1 & k & 0 \end{pmatrix}$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

(i) Stabilire per quali valori di k le righe di A sono linearmente indipendenti.

(ii) Stabilire per quali valori di k l'ultima colonna di A è combinazione lineare delle precedenti.

(iii) Per $k = 0$ trovare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A, e una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dalle righe di A.

Esercizio 5. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{v_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare la dimensione dello spazio lineare generato da $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\underline{v}_4$, $\text{Span}\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}\}(= \mathcal{L}in(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4))$.

(ii) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\text{Span}\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}\}$.

(iii) Completare $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare la dimensione di $\text{Span}\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}\}(= \mathcal{L}in(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3))$.

(ii) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\text{Span}\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}\}$.

(iii) Completare $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^4$.

(iv) Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\underline{u} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \\ k \end{pmatrix}$ appartiene a $\text{Span}\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}\}$.

Esercizio 7. Sia $\mathcal{S}_n$ l'insieme delle matrici simmetriche di ordine n e sia $\mathcal{A}_n$ l'insieme delle matrici antisimmetriche di ordine n.

(i) Dimostrare che $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ sono sottospazi vettoriali di $M_{n\times n}$.

(ii) Calcolare la dimensione di $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{A}_2$ esibendone delle basi.

(iii) Provare a svolgere il punto precedente per un qualsiasi $n \geq 2$.

Esercizio 8. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Data una matrice $A \in M_{4\times 6}$, le colonne di A sono necessariamente linearmente dipendenti.

(ii) Data una matrice $A \in M_{4\times 6}$,, le righe di A sono necessariamente linearmente indipendenti.

(iii) Quattro polinomi in P^4 non possono generare P^4.

(iv) Quattro polinomi linearmente indipendenti in P^3 generano necessariamente tutto P^3.

(v) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano U e V due sottospazi di V.
Se $\dim U = \dim V$, allora $U = V$.

(vi) Lo spazio vettoriale P^2 ha una base di polinomi $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ tali che $p(0) = 0$ per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$.

(vii) Ogni base di $M_{2\times 2}$ contiene una matrice invertibile.