Geometria

Esercizi su coordinate e cambiamenti di base

Esercizio 1. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e si definiscano $W_1 := \mathcal{L}in(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$ e $W_2 := \mathcal{L}in(\overline{v}_3, \overline{v}_4)$.

(i) Calcolare la dimensione di W_1 e di W_2;

(ii) Mostrare che $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un elemento di W_1 e determinare le sue coordinate in termine di $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_2$;

(iii) È vero che $\overline{v}_3 \in W_1$?

(iv) Determinare lo spazio somma $W_1 + W_2$.

(v) Esiste alcun vettore non-nullo che appartiene a W_1 e a W_2? (*Sug. Usare la formula di Grassmann*)

Esercizio 2. Si considerino i seguenti vettori dello spazio P^5 dei polinomi di grado minore o uguale a 5: $p_1(x) = 4x - x^2 + x^5, p_2(x) = 1 - x^2, p_3(x) = 2 + 4x^3, p_4(x) = x^4 - x^5$ e sia $W := \mathcal{L}in(p_1, p_2, p_3, p_4) \subset P^5$.

(i) Verificare se i vettori p_1, p_2, p_3, p_4 sono linearmente indipendenti;

(ii) Calcolare la dimensione di W e esibirne una base.

Esercizio 3. Sia $\mathbf{H} \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione $2x - y + z = 0$. Trovare due basi distinte di $\mathbf{H}$ e scrivere le coordinate del vettore $\overline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in questa base.

Esercizio 4. Trovare le coordinate del vettore $\overline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ rispetto alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori

(i) $\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\overline{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(ii) $\overline{w_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\overline{w_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5. Siano

$$\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{w_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{w_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e siano $\mathfrak{B}_1 = \overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ e $\mathfrak{B}_2 = \overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3$.

(i) Mostrare che $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$ sono basi di $\mathbb{R}^3$;

(ii) Determinare le coordinate del vettore $\overline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base $\mathfrak{B}_2$;

(iii) Determinare le matrici di cambiamento di base da $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$ e vice-versa.

(iv) Usando i punti precedenti, determinare le coordinate del vettore $\overline{u}$ nella base $\mathfrak{B}_2$.

Esercizio 6. Verificare che $\mathfrak{B} = (x+1)^2, x+1, 1$ è una base dello spazio vettoriale P^2 dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e determinare le coordinate del polinomio $p(x) = 2x^2 - x + 4$ nella base $\mathfrak{B}$.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{R}^4$ munito della base canonica $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$, $\overline{e}_4$ e siano $\overline{v}_1 := \overline{e}_1 - \overline{e}_3 + \overline{e}_4$, $\overline{v}_2 = \overline{e}_2 - \overline{e}_4$, e $\overline{v}_3 = \overline{e}_3 + \overline{e}_4$. Verificare che $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ e $\overline{v}_3$ sono linearmente indipendenti e determinare un vettore $\overline{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ tale che valgano contemporaneamente le condizioni seguenti:

(a) $\mathfrak{B} = \overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ sia una base di $\mathbb{R}^4$, e

(b) il vettore $\overline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ abbia coordinate $0, -1, 1, 1$ nella base $\mathfrak{B}$.

Esercizio 8. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Non esistono due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 la cui intersezione è il vettore $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$;

(ii) La somma di due sottospazi distinti di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 è sempre uguale a $\mathbb{R}^3$;

(iii) Non esistono due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 la cui intersezione è il vettore $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}$;

(iv) La somma di due sottospazi distinti di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$;

(v) Date due base distinte $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$ di $\mathbb{R}^n$, le coordinate di un vettore $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ in queste base sono sempre diverse.

(vi) Date due base distinte $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$ di $\mathbb{R}^n$, le coordinate di un vettore $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ in queste base sono sempre proporzionali.