

Geometria

Esercizi su cambiamenti di base e diagonalizzazione

Esercizio 1. Determinare quale delle seguenti applicazioni lineari sono isomorfismi:

(i) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix};$

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) $h : P^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, h(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix};$

(iv) $t : M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}, t(A) = A + A^T.$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_1 - 9x_2 \\ 6x_1 - 7x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$

(i) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica.

(ii) Scrivere la matrice associata a f nella base $\mathcal{B} = \{-\underline{e}_1 + \underline{e}_2, -2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2, -\underline{e}_3\}.$

(iii) Scrivere la matrice associata a f nella base \mathcal{B} in partenza e nella base canonica in arrivo.

(iv) Dire se f è un isomorfismo.

(v) Determinare l'immagine inversa di un vettore $\bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e il nucleo di f .

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $F_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ e definita come $F_h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + hx_2 & 0 \\ x_3 & x_1 - hx_2 \end{pmatrix}.$

(i) Scrivere la matrice associata a F_h nelle basi canoniche del dominio e del codominio.

(ii) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare l'immagine e il nucleo di F_h .

(iii) Supponendo che $h = 0$, determinare:

(a) l'immagine inversa di $\bar{0} \in M_{2 \times 2};$

(b) la matrice della composizione di F_h con l'applicazione $t : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}, A \mapsto A^T$ relativamente alle basi canoniche per due metodi diversi.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_1 - 12x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 - 12x_2 + 8x_3 \end{pmatrix}.$

(i) Scrivere la matrice A associata a f nella base canonica.

(ii) Verificare che $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di \mathbb{R}^3 .

(iii) Scrivere la matrice associata a f nella base \mathcal{B} .

(iv) Verificare che A è diagonalizzabile esibendone una base di autovettori.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'unico operatore lineare tale che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $f \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(i) Dimostrare che f è diagonalizzabile.

(ii) Determinare la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.

(iii) Determinare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$ (*Suggerimento: P è la matrice di cambiamento di base dalla base canonica a una base \mathcal{B} di autovettori. D è la matrice diagonale i cui elementi sulla diagonale principale sono gli autovalori di f nell'ordine corrispondente agli autovettori in \mathcal{B}*).

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$.

(i) Scrivere la matrice A associata a f nella base canonica.

(ii) Esibire, se esiste, una base di autovettori di f .

(iii) Trovare, se possibile, una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$.

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'unico operatore lineare tale che soddisfi le tre seguenti condizioni:

- \underline{e}_2 è un autovettore di f di autovalore 2;
- $f(\underline{e}_1) = \underline{e}_2 + \underline{e}_3$;
- $f(\underline{e}_3) = -\underline{e}_2 + \underline{e}_3$.

(i) Si scriva la matrice associata a f nella base canonica.

(ii) Si determini una base per l'immagine di f .

(iii) Verificare se f è diagonalizzabile.

Esercizio 8. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Non esistono applicazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$;

(ii) Tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono iniettive;

(iii) Data una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, il $f^{-1}(\bar{0})$ è un sottospazio di \mathbb{R}^2 di dimensione maggiore o uguale a 1.

- (iv) Siano A , A' e A'' tre matrici quadrate dello stesso ordine. Se A è simile a A' e A' è simile a A'' , allora A è simile a A'' .
- (v) Sia A una matrice triangolare superiore i cui elementi sulla diagonale superiore sono tutti distinti. Allora A è diagonalizzabile.
- (vi) Ogni matrice triangolare superiore è diagonalizzabile.
- (vii) Sia A una matrice diagonalizzabile e invertibile. Allora A^{-1} è diagonalizzabile e ogni suo autovalore è della forma λ^{-1} per qualche autovalore λ di A .
- (viii) Ogni matrice diagonalizzabile è invertibile.