Geometria

Prova di autovalutazione

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite dipendente dl parametro k:

$$S : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ kx + 3y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 4kz = 1 \end{cases} .$$

(i) Dire per quali valori di k il sistema è compatibile.

(ii) Risolvere il sistema per $k = 1$.

(iii) Sia W l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a S nel caso $k = 1$. Esprimere W in forma parametrica.

(iv) Si consideri il sottospazio $U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Determinare una base per $U \cap W$ e la dimensione di $U + W$

Esercizio 2. Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e si consideri l'applicazione lineare $f : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R})$ definita da $f(A) = AB$ per ogni $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(i) Trovare la matrice associata a f nella base canonica.

(ii) Trovare una base di $\text{Ker}f$ e una base di $\text{Im}f$.

(iii) Stabilire se l'insieme $\{A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid f(A) = I\}$ è un sottospazio vettoriale di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Stabilire per quali valori di k la matrice A è diagonalizzabile.

(ii) Per $k = 1$, determinare gli autovalori di A, la loro molteplicità algebrica e la loro molteplicità geometrica.

(iii) Per $k = 1$, trovare una matrice C ortogonale e una matrice D diagonale tali che $D = C^T AC$.

Esercizio 4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Se A è una matrice quadrata, allora tutte gli elementi della matrice A^2 sono ≥ 0.

(ii) Sia $\underline{w} \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo e sia $W := \{\underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0\}$. Allora W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - 1$.

(iii) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore lineare il cui polinomio caratteristico è $x^3 + 2x^2 + x$. Allora f non è iniettivo.

(iv) Sia A una matrice quadrata tale che $A^2 = A$. Allora i possibili autovalori di A sono 0 e 1.