Geometria

Prova di autovalutazione

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite dipendente dl parametro k:

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + kx_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - kx_4 = -1 \end{cases} .$$

(i) Dire per quali valori di k il sistema è compatibile.

(ii) Sia W l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a S nel caso $k = 1$. Esprimere W in forma parametrica.

(iii) Si consideri il sottospazio $U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Determinare una base per U e scrivere U in forma cartesiana.

(iv) Determinare una base per $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.

Esercizio 2. Sia P^2 lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a due e sia $f : P^2 \to P^2$ tale che $f(p(x)) = xp'(x) + p(1)$.

(i) Mostrare che f è un'operatore lineare.

(ii) Trovare la matrice associata a f nella base canonica $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$.

(iii) Determinare Ker$f$ e una base di Imf.

(iv) Stabilire se l'insieme $\{p(x) \in P^2 \mid f(p(x)) = p(x)\}$ è un sottospazio vettoriale di P^2.

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$ uno scalare e si consideri l'operatore lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(e_1) = ke_2$, $f(e_2) = ke_1 + e_3$, $f(e_3) = e_2$ e $f(e_4) = e_4$.

(i) Scrivere la matrice A associata all'operatore f relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^4$;

(ii) Stabilire per quali valori di k l'operatore f è diagonalizzabile.

(iii) Per $k = 0$, determinare gli autovalori di A, la loro molteplicità algebrica e la loro molteplicità geometrica.

(iv) Per $k = 0$, trovare una matrice P ortogonale e una matrice D diagonale tali che $D = P^T AP$.

Esercizio 4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Sia A una matrice quadrata tale che $A^2 = I$. Allora A è invertibile.

(ii) Sia A una matrice triangolare superiore. Allora A è diagonalizzabile.

(iii) Non esiste alcuna matrice ortogonale con autovalori $1, 2$ e 3.

(iv) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore lineare il cui polinomio caratteristico è $(x - 1)(x + 2)x$. Allora f non è suriettivo.