

# Geometria

## Esercizi introduttivi

**Esercizio 1.** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi. Dimostrare che  $A \cup B = B$  se e solo se  $A \subset B$ .

**Esercizio 2.** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi. Dimostrare le uguaglianze  $A \cup (A \cap B) = A$  e  $A \cap (A \cup B) = A$ .

**Esercizio 3.** Sia  $\text{Sol}(S)$  l'insieme delle soluzioni del sistema lineare  $S : \begin{cases} x + 3y + z = 4 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ .

(i) Dire quali dei seguenti vettori appartengono a  $\text{Sol}(S)$ :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

(ii) Dire per quali valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  il seguente vettore appartiene a  $\text{Sol}(S)$ :  $\begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$ .

(ii) Dire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  il seguente vettore appartiene ad  $\text{Sol}(S)$ :  $\begin{pmatrix} 7 - h \\ -1 \\ h \end{pmatrix}$ .

(iii) Determinare l'insieme delle soluzioni. Argomentare che si tratta dell'insieme giusto.

**Esercizio 4.** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Dato un sistema omogeneo, la somma di due sue soluzioni è ancora una sua soluzione.

(ii) Dato un sistema omogeneo, il prodotto di una sua soluzione per un qualsiasi scalare è ancora una sua soluzione.

(ii) Dato un sistema lineare qualunque, la somma di due sue soluzioni è ancora una sua soluzione.

(iii) Dato un sistema lineare qualunque, il prodotto di una sua soluzione per un qualsiasi scalare è ancora una sua soluzione.

**Esercizio 5.** Dire per quali valore del parametro  $k \in \mathbb{R}$  le seguenti matrici sono a scala:

(i)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

(ii)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k & k \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ ;

(iii)  $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & k & k \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Esercizio 6.** Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) La trasposta di una matrice simmetrica è antisimmetrica.

(ii) L'unica matrice di ordine  $n$  contemporaneamente simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla di ordine  $n$ .

(iii) Ogni matrice diagonale è a scala.

(iv) Ogni matrice a scala è triangolare superiore.

(v) Ogni matrice triangolare superiore è a scala.