Geometria

Esercizi su sistemi lineari e prodotti di matrici

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$C(h) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & h & 2 & h \\ 1 & 1+h & 1 & 2h \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui il sistema lineare che ha $C(h)$ come matrice completa è compatibile. Per tali valori di h, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema e l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esercizio 2. Si dica per quali valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} kx + y + z & = & 1-k \\ y + (1-k)z & = & 1 \\ x + y & = & 1 \end{cases}$$

Per i valori di k trovati, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Esercizio 3. Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se i seguenti prodotti sono definiti e, in caso affermativo, calcolarli: $A^2 := AA$, AB, BA, B^2, AC, CA.

Esercizio 4. Dimostrare che il prodotto AB di due matrici simmetriche A e B dello stesso ordine è una matrice simmetrica se e solo se A e B commutano.

Esercizio 5. Sia A una matrice quadrata di ordine 3 tale che $AB = 0$ per ogni matrice quadrata B di ordine 3. Dimostrare che A è la matrice nulla.

Esercizio 6. (i) Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice 2×2 tale che $ad - bc \neq 0$. Mostrare che A è invertibile e che la sua inversa è la matrice $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$.

(ii) Per ciascuna delle seguente matrici, dire se è invertibile e, in caso positivo, trovare l'inversa:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, si fornisca una dimostrazione. Se sono false, si esibisca un controesempio.

(i) Due matrici diagonali A e B dello stesso ordine commutano sempre (cioè $AB = BA$).

(ii) Una matrice che abbia due righe una multipla dell'altra non è mai invertibile.

(iii) Data una qualsiasi matrice A, esiste sempre il prodotto $A^2 := AA$.

(iv) Sia A una matrice quadrata. Se $A \neq 0$, allora $A^2 \neq 0$.

(v) Sia A una matrice la cui prima riga è nulla. Il prodotto AB, se definito, ha la prima riga nulla qualsiasi sia la matrice B.

(vi) Il prodotto di due matrici invertibili è ancora invertibile.

(vii) Siano A, B, C tre matrici quadrate dello stesso ordine. Se $AB = AC$, allora $B = C$.

(viii) Siano A, B, C tre matrici quadrate dello stesso ordine e sia A invertibile. Se $AB = AC$, allora $B = C$.