Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2015/2016
Complementi di Matematica (L-Z)
Primo Appello – 13 Giugno 2016.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Specificare quale esame si deve sostenere: **Geometria** □ **Calcolo II** □

Se si è esonerati barrare la casella: □
Chi ha sostenuto e superato la prova di esonero deve solo risolvere gli esercizi dal 5 all'8.

Esercizio 1. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base

$$\mathbf{b} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$ determinare una base ortogonale $\mathbf{v}$ rispetto al prodotto scalare standard. Successivamente se ne calcoli la corrispondente base ortonormale $\mathbf{w}$.

Risposta:

Soluzione: La base $\mathbf{v}$ cercata è: $v_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$v_2 = b_2 - \frac{b_2 \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = b_3 - \frac{b_3 \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 - \frac{b_3 \bullet v_2}{v_2 \bullet v_2} v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La base $\mathbf{w}$ è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{v}_1, \frac{1}{\sqrt{14}} \mathbf{v}_2, \frac{1}{\sqrt{21}} \mathbf{v}_3 \right\}$$

Esercizio 2. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X, Y, Z) = Y^2 + Z^2 + 2XY - 2XZ$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Risposta:
Soluzione: Matrice della forma bilineare simmetrica associata:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1.$
Autospazi: $V_1 = \langle (0, 1, 1) \rangle,\ V_2 = \langle (-1, -1, 1) \rangle,\ V_{-1} = \langle (2, -1, 1) \rangle$
Base ortonormale diagonalizzante: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1) \right\}$

Espressione di q in tale base: $q(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + 2X_2^2 - X_3^2$.
Forma canonica di Sylvester: $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2$.
q è indefinita, non degenere, con segnatura $(2, 1)$.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette:

$$r : -X - Y + 3Z = X + 2Y - Z = 0, \quad s : \frac{X-2}{-5} = \frac{Y}{2} = -Z - 1$$

Dopo aver verificato che sono parallele si determini un'equazione del piano che le contiene.
Soluzione Vettore di direzione di r è $(-5, 2, -1)$. Piano: $2X + 7Y + 4Z = 0$.

Esercizio 4. Si consideri la conica di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{C} : X^2 - 2X - Y^2 + 2Y - 10 = 0$$

Dopo averla classificata la si metta in forma canonica.
Soluzione: $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere. Il suo centro è $C = (1, 1)$. La forma quadratica è già in forma diagonale quindi è solo necessaria la traslazione

$$T(X, Y) = (X + 1, Y + 1)$$

per portare $\mathcal{C}$ nella forma canonica $X^2 - Y^2 - 10 = 0$.

Esercizio 5. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y + y' = 2\cos(t)$$

Soluzione: Soluz. equazione omogenea: $y = Ce^{-t}$.
$B(t) = 2\int e^t \cos(t)dt = e^t(\sin(t) + \cos(t))$.
Soluzione generale: $y(t) = \sin(t) + \cos(t) + Ce^{-t}$

Esercizio 6. Si consideri la curva differenziabile:

$$\alpha(t) = (\sqrt{2}, e^t, e^{-t}), \quad t \in \mathbb{R}$$

Dopo aver verificato che è regolare, se ne determinino in un punto $\alpha(t)$ qualunque triedro di Frenet e torsione. Concludere che la curva è piana e scrivere una equazione del piano che la contiene.
Soluzione $\alpha' = (0, e^t, -e^{-t})$, $\alpha'' = (0, e^t, e^{-t})$, $\alpha''' = (0, e^t, -e^{-t})$.
$v(t) = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$, $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (2, 0, 0)$, $\tau(t) = 0$.
$T(t) = \frac{1}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}(0, e^t, -e^{-t})$, $N(t) = \frac{1}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}(0, e^{-t}, e^t)$, $B(t) = (1, 0, 0)$.
La curva è piana perchè ha torsione nulla ed è contenuta nel piano: $X = \sqrt{2}$.

Esercizio 7'. Calcolare il volume del solido compreso tra il paraboloide di equazione $z = 2 - x^2 - y^2$ e il piano $z = 0$.
Soluzione

$$V = \iint_D (2 - x^2 - y^2) dx\, dy$$

dove D è il cerchio di equazione $x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}$. In coordinate polari abbiamo

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2-\rho^2)\rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi.$$

Esercizio 8. Determinare e classificare i punti critici della funzione su $\mathbb{R}^2$:

$$f(X,Y) = \frac{Y^3}{3} + X^2Y - 4X - 5Y$$

Nell'eventuale punto di minimo relativo calcolare il piano tangente al grafico.

Soluzione: $\nabla f = (2XY - 4, Y^2 + X^2 - 5)$. I punti critici sono soluzioni del sistema:

$$2XY - 4 = 0 = Y^2 + X^2 - 5$$

e quindi sono i quattro punti: $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (1,2)$, $P_3 = (-2,-1)$, $P_4 = (-1,-2)$.

La matrice hessiana è $H = \begin{pmatrix} 2X & 2Y \\ 2Y & 2X \end{pmatrix}$ e si trova:

P_1 e P_3 sono punti di sella, P_2 è un minimo relativo e P_4 è un massimo relativo.

Piano tangente in $(1,2,f(1,2)) = (1,2,-\frac{28}{3})$ è $Z - \frac{28}{3} = 0$.