Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Primo esonero: 06/04/2017

Docente: Margarida Melo

Durata: 2h15m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Esercizio 1. *(*4 punti*) Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^2$*, indicare (senza giustificazione) l'interno, la chiusura, la frontiera e il derivato.*

(i) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$.
R: $\mathrm{int}(A_1) = \emptyset$; $\overline{A_1} = A_1$; $\mathrm{Fr}(A_1) = A_1$; $A_1' = A_1$.

(ii) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.
R: $\mathrm{int}(A_2) = \emptyset$; $\overline{A_2} = A_2 \cup \{(0,0)\}$; $\mathrm{Fr}(A_2) = \overline{A_2} = A_2 \cup \{(0,0)\}$; $A_2' = \{(0,0)\}$.

(iii) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, xy = 0\}$.
R: $\mathrm{int}(A_3) = \emptyset$; $\overline{A_3} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \leq 1, \mathrm{xy} = 0\}$; $\mathrm{Fr}(A_3) = \overline{A_3}$; $A_3' = \overline{A_3}$.

(iv) $A_4 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.
R: $\mathrm{int}(A_4) = \emptyset$; $\overline{A_4} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$; $\mathrm{Fr}(A_4) = \overline{A_4}$; $A_4' = \overline{A_4}$.

Esercizio 2. *(*10 punti*) Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Sia $B \subset X$ un chiuso. Allora $B = \overline{\mathrm{int}(B)}$.

R: Falso. Si prenda ad esempio $B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ oppure l'esempio dell'esercizio 1(i).

(ii) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente in uno spazio T_1. Allora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette un unico limite.

R: Falso. Si prenda ad esempio un insieme infinito qualsiasi X munito della topologia quoziente. Allora X é T_1 ma una successione $\{x_n\}$ in X tale che x_n assume una infinità di valori converge per ogni punto $x \in X$.

(iii) Un quoziente di uno spazio T_1 è T_1.

R: Falso. Si prenda un sottoinsieme non chiuso A di un insieme X. Allora il quoziente X/A non è T_1 perché $[A]$ non é un punto chiuso di X/A.

(iv) Una applicazione continua e suriettiva $f : [0,1] \to X$ in uno spazio di Hausdorff X è una identificazione.

R: Vero. Basta osservare che una tale applicazione sarà anche chiusa. Infatti, essendo $[0,1]$ compatto, un suo sottoinsieme chiuso V è compatto, quindi la sua immagine $f(V)$ è un compatto di X. Essendo X di Hausdorff, $f(V)$ è necessariamente chiuso (perché compatto).

(v) Un quoziente di uno spazio compatto è compatto.

R: Vero. La compattezza viene preservata da funzioni continue, quindi siccome le identificazioni sono in particolare suriettive, se il dominio è compatto, anche l'imagine sarà compatta.

Esercizio 3. *(4 punti) Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua tra spazi topologici, dove Y è di Hausdorff. Si dimostri che:*

(i) Il grafico di f, $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y |\, x \in X\}$, è chiuso in $X \times Y$.

R: Consideriamo la funzione $(f, id_Y) : X \times Y \to Y \times Y$. Siccome entrambe f e id_Y sono continue, anche (f, id_Y) è continua. Essendo Y di Hausdorff, la diagonale $\Delta_Y \subset Y \times Y = \{(y, y)|y \in Y\}$ è un chiuso di $Y \times Y$. Ma $\Gamma_f = (f, id_Y)^{-1}(\Delta_Y)$, quindi Γ_f è un chiuso di $X \times Y$.

(ii) Se $Y = X$, allora il sottoinsieme $\{x \in X : f(x) = x\}$ dei punti fissi di f è un chiuso di X.

R: Basta osservare che in questo caso l'insieme dei punti fissi di f è l'intersezione dei chiusi Γ_f e Δ_X di $X \times X$.

Esercizio 4. *(6 punti) Una funzione continua e suriettiva $r : X \to A$ da uno spazio topologico X in uno suo sottospazio si dice un retratto di A se $r_{|A}$ è l'applicazione identità da A in A. Si dimostri che*

(i) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un retratto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

R: Si definisca $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to S^1$ ponendo $r(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)$.

(ii) Un retratto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

R: Basta osservare che dato un retratto $r : X \to Y$, allora Y coincide con l'insieme dei punti fissi di r, e quindi è un chiuso per l'esercizio 3(ii).

(iii) Concludere che né $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ né $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sono retratti di $\mathbb{R}^2$.

R: Basta osservare che né $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ né $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sono chiusi in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 5. *(4 punti) Sia X uno spazio metrizzabile. Si dimostri che se X è anche separabile, allora soddisfa il secondo assioma di numerabilità.*

R: Sia $A \subset X$ un sottoinsieme denso di X e sia $\mathcal{B} = \{D_{\frac{1}{n}}(a), a \in A\}$. Vediamo che $\mathcal{B}$ è una base della topologia di X.

Sia U un'aperto di X. Faremo vedere che U si può scrivere come unione di elementi di $\mathcal{B}$. Sia x un elemento di U e sia $\epsilon > 0$ tale che $D_\epsilon(x) \in U$. Sia $a \in A$ tale che $a \in D_{\frac{\epsilon}{3}}(x)$ (tale A esiste poiché A è denso in X). Sia q un razionale tale che $\frac{\epsilon}{3} < q < \frac{2\epsilon}{3}$. Allora si ha che $x \in D_q(a) \subset D_\epsilon(x) \subset U$ e, come volevamo, U è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Esercizio 6. *(8 punti) Si denoti con $\mathbb{R}_l$ l'insieme dei numeri reali munito della topologia di Sorgenfrey o del limite inferiore, cioè la topologia avendo come base gli insiemi del tipo*

$$\mathcal{B} := \{[a, b) : a \leq b \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Si dimostri che $\mathbb{R}_l$ è uno spazio topologico strettamente più fine di $\mathbb{R}$ munito della topologia euclidea.

R: Dato un aperto della base della topologia euclidea del tipo (a, b), per $a < b \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere $(a, b) = \cup_{a<x<b}[x, b)$, quindi $\mathbb{R}_l$ è più fine della topologia euclidea. Per concludere che è strettamente più fine si osserva che un intervallo del tipo $[a, b)$ invece non è aperto per la topologia euclidea.

(ii) *Si dimostri che* $[0,1]$ *non è compatto in* $\mathbb{R}_l$.

R: Prendiamo il seguente ricoprimento aperto di $[0,1]$: $\mathcal{U} = \cup_{0<x<\frac{1}{2}}[0,x) \cup [\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$. È facile vedere che il ricoprimento $\mathcal{U}$ non ammette nessun ricoprimento finito, quindi $[0,1]$ non è compatto nella topologia di Sorgenfrey.

(iii) *Si dimostri che* $\mathbb{R}_l$ *è separabile e soddisfa il primo assioma di numerabilità, ma non soddisfa il secondo assioma di numerabilità.*

R: Per mostrare che $\mathbb{R}_l$ è separabile vediamo che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Sia $x \in \mathbb{R}$ e U_x un suo intorno. Allora U_x contine un'aperto del tipo $[x, x+\epsilon)$, per un certo $\epsilon > 0$. Allora U_x ha sicuramente punti razionali, quindi $U_x \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ e si conclude che $x \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Sia adesso $x \in \mathbb{R}$. Una base locale di intorni di x è data da $\mathcal{U}_x = \{[x, x+\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$. Quindi $\mathbb{R}_l$ soddisfa il primo assioma di numerabilità perché $\mathcal{U}_x$ é numerabile.

Vediamo adesso che $\mathbb{R}_l$ non soddisfa il secondo assioma di numerabilità. Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathcal{R}_l$. Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, gli aperti del tipo $[x, x+1)$ sono unione di elementi di $\mathcal{B}$. Questo implica che in B esiste un elemento U_x che contiene x e tale che $\min\{y \in U_x\} = x$. Questo implica che $U_x \neq U_{x'}$ per $x \neq x'$, quindi $\mathcal{B}$ non può essere numerabile.

(iv) $\mathbb{R}_l$ *è metrizzabile?*

R: $\mathbb{R}_l$ non è metrizzabile. Infatti, siccome è separabile, d'accordo con l'esercizio 5, se fosse anche metrizzabile allora $\mathbb{R}_l$ dovrebbe soddisfare anche il secondo assioma di numerabilità, il che non è vero per quanto dimostrato in 6(iii).

Esercizio 7. *(*4 punti*) Sia* $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \ldots$ *una catena di chiusi non vuoti in uno spazio compatto. Concludere che* $\cap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

R: Supponiamo, per assurdo, che $\cap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset$. Allora $\mathcal{U} := \{X \setminus C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un riccoprimento aperto di X. Essendo X compatto, $\mathcal{U}$ ammette un sottoricoprimento finito $X \subset (X \setminus C_{i_1}) \cup \cdots \cup (X \setminus C_{i_k})$. Ma se $C_{i_1} \supset \cdots \supset C_{i_k}$, otteniamo che $(X \setminus C_{i_1}) \subset \cdots \subset (X \setminus C_{i_k})$, e consequentemente che X è contenuto in $X \setminus C_{i_k}$, il che è un assurdo perché per ipotesi gli C_i sono non vuoti.