

**Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017**  
**GE220 - Geometria 3 - Tutorato X**

DOCENTE: PROF. MARGARIDA MELO  
TUTORI: DAVIDE CIACCIA, MATTEO BRUNO

Esercizio 1 Sia  $X := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  munito della topologia euclidea, e  $f : X \rightarrow X$  un omeomorfismo. Si dimostri che  $f(\partial X) = \partial X$ .

Esercizio 2 Dimostrare che  $S^1$  è omotopicamente equivalente alla palla chiusa spuntata  $B = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ . Stabilire se è anche omotopicamente equivalente alla palla aperta spuntata  $B = \{x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ .

Esercizio 3 Sia  $X \subset \mathbb{R}^2$  un aperto convesso, e sia  $x \in X$ . Si calcoli il gruppo fondamentale di  $X \setminus \{x\}$ .

Esercizio 4 Sia  $r$  una retta qualsiasi nello spazio. Si calcoli il gruppo fondamentale di  $\mathbb{R}^3 \setminus r$ .

Esercizio 5 Si dimostri che ogni omomorfismo  $\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1)$  è indotto da una opportuna applicazione continua  $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ .

Esercizio 6 Si costruiscano infinite retrazioni  $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ , a due a due non omotope tra loro.

Esercizio 7 Sia  $f : S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I$  l'applicazione definita da  $f(\theta, s) := (\theta + 2\pi s, s)$ , di modo che  $f|_{S^1 \times \{0\}} = id_{S^1 \times \{0\}}$  e  $f|_{S^1 \times \{1\}} = id_{S^1 \times \{1\}}$ .

(a) Si dimostri che esiste un'omotopia  $H_t$  tra  $f$  e l'identità  $id_{S^1 \times I}$  che fissa  $S^1 \times \{0\}$  oppure  $S^1 \times \{1\}$ .

(b) Si dimostri che non esiste un'omotopia  $H_t$  tra  $f$  e l'identità  $id_{S^1 \times I}$  che fissa contemporaneamente  $S^1 \times \{0\}$  e  $S^1 \times \{1\}$ .

*Suggerimento:* considerare l'immagine in  $S^1 \times I$  tramite  $f$  del cammino  $\alpha : s \rightarrow (\theta_0, s)$ .