Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Tutorato I

Docente: Prof. Margarida Melo
Tutori: D. Ciaccia, M. Bruno

Esercizio 1 Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$.
Dire quali tra le seguenti famiglie di insiemi è una topologia su X.
(a) $\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{a, b\}\}$
(b) $\{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, c\}\}$
(c) $\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d, e\}\}$

Esercizio 2 Sia X un insieme e $A \subset X$. Mostrare che

$$\Gamma := \{Y \subset X \mid A \subset Y\} \cup \{\emptyset\}$$

è una topologia su X. Che topologie si hanno quando $A = \emptyset$ o $A = X$?

Esercizio 3 Sia $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ una famiglia di topologie su X. Mostrare che $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{T}_i$ è una topologia su X. Cosa si può dire per l'unione?

Esercizio 4 Dimostrare che ognuna delle seguenti è una distanza su $\mathbb{R}^n$:

(a) $d_1(x, y) = \|x - y\|$;
(b) $d_2(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;
(c) $d_3(x, y) = \max\limits_{i} \{|x_i - y_i|\}$.

Dimostrare inoltre che queste distanze sono topologicamente equivalenti.
Per $n = 2$ e $R > 0$ fissato, disegnare il disco di centro $(0, 0)$ e raggio R rispetto d_1, d_2 e d_3.

Esercizio 5 Si consideri lo spazio topologico $S = ([0, 1) \backslash \{\frac{1}{2}\}) \cup \{3\}$, con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Si trovino in S:

(a) un sottospazio aperto e chiuso;
(b) un sottospazio aperto ma non chiuso;
(c) un sottospazio chiuso ma non aperto;
(d) un sottospazio né aperto né chiuso.

Si calcoli l'interno e la chiusura di S e i suoi punti di accumulazione.

Esercizio 6 Sia $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ xy > 0\}$ dotato della topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$. Dopo aver stabilito se X è aperto e/o chiuso in $\mathbb{R}^2$, mostrare che $Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0\}$ è chiuso in X ma non in $\mathbb{R}^2$. Mostrare inoltre che Y è anche aperto in X.

ESERCIZIO 7 Si consideri $\mathbb{R}$ dotato della topologia cofinita. Si discuta la continuità delle seguenti funzioni:

$$f(x) := \begin{cases} 3 & \text{se } x = 1 \\ \frac{x^2}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

$$g(x) := \sin x$$

Si caratterizzino poi le funzioni continue da $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$.

ESERCIZIO 8 Dimostrare che se X è uno spazio topologico che contiene un numero finito di punti, ognuno dei quali è chiuso, allora X è discreto.

ESERCIZIO 9 Uno spazio topologico X si dice **irriducibile** se dati comunque due chiusi X_1, X_2 tali che $X = X_1 \cup X_2$ risulta $X = X_1$ oppure $X = X_2$.
Sia X uno spazio topologico. Mostrare che sono equivalenti:

(a) X è irriducibile;
(b) $\forall A_1, A_2$ aperti non vuoti di X, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$;
(c) $\forall A \subset X$ aperto non vuoto, $\overline{A} = X$.

ESERCIZIO 10 Mostrare che i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ chiusi e limitati rispetto alla topologia euclidea, con l'insieme vuoto e tutto $\mathbb{R}$, definiscono i chiusi di una topologia strettamente meno fine di quella euclidea.

ESERCIZIO 11 Sia X un insieme infinito, munito della topologia cofinita. Si dimostri che X non è metrizzabile.

ESERCIZIO 12 Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ non sono aperti rispetto alla distanza euclidea:

$\mathbb{Z}^n, \ \mathbb{Q}^n, \ \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}, \ \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$