Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Tutorato II

Docente: Prof. Margarida Melo

Tutori: D. Ciaccia, M. Bruno

Esercizio 0 In $\mathbb{R}$, munito della topologia euclidea, calcolare il derivato dell'insieme $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Esercizio 1 Sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si consideri

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, \mathbb{N}, \{n \in \mathbb{N} : n \geq i\}_{i \in \mathbb{N}}\}$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{N}$.
(b) Trovare i punti di accumulazione dell'insieme $\{3, 7, 51, 107\}$.
(c) Determinare i sottoinsiemi A di $\mathbb{N}$ tali che $A' = \mathbb{N}$.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}$, sia S il sottoinsieme definito da

$$S = \left\{\frac{n}{n+1}, n = 0, 1, ...\right\}$$

(a) Dimostrare che $\bar{S} = S \cup \{1\}$ nella topologia euclidea.
(b) Dimostrare che $\bar{S} = \mathbb{R}$ nella topologia cofinita.

Esercizio 3 Siano X, Y spazi topologici, $f : X \longrightarrow Y$ una funzione continua e iniettiva, e sia $Z \subset X$.

(a) Dimostrare che $f(Z') \subset f(Z)'$.
(b) Stabilire se l'asserzione (a) è vera se f è continua ma non iniettiva.

Esercizio 4 Verificare che gli insiemi $[x, z)$, per $z > x$, formano una base locale in x per una topologia $\mathbf{K}$ sulla retta reale, detta la retta di Sorgenfrey.
Quali intervalli della retta reale sono aperti in $\mathbf{K}$?
Trovare la chiusura dei seguenti insiemi in $\mathbf{K}$:

(a) $\mathbb{Q}$;
(b) $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$;
(c) $\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Dimostrare che $\mathbf{K}$ non soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

Esercizio 5 Sia $\mathbf{K}$ la retta di Sorgenfrey e, per ogni $\lambda \in \mathbf{K}$, sia $f : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ la funzione definita ponendo $f(x) := \lambda x$ per ogni $x \in \mathbf{K}$.

(a) Discutere la continuità di f, al variare di $\lambda \in \mathbb{K}$.
(b) Determinare i valori di λ per cui la funzione f è un omeomorfismo.

Esercizio 6 Uno spazio topologico X si dice **irriducibile** se dati comunque due chiusi X_1, X_2 tali che $X = X_1 \cup X_2$ risulta $X = X_1$ oppure $X = X_2$.

(a) Dimostrare che ogni spazio discreto con almeno due punti è riducibile.
(b) Dimostrare che la retta euclidea reale è riducibile.
(c) Dimostrare che ogni spazio infinito con la topologia cofinita è irriducibile.