Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Tutorato III

DOCENTE: PROF. MARGARIDA MELO

TUTORI: D. CIACCIA, M. BRUNO

ESERCIZIO 0 Siano X, Y due spazi topologici, e sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua e biunivoca. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) f è un omeomorfismo;
(b) f è aperta;
(c) f è chiusa.

ESERCIZIO 1 Si consideri $\mathbb{R}$ munito della topologia euclidea.

(a) Dimostrare che due qualsiasi intervalli aperti (eventualmente illimitati) sono omeomorfi.
(b) Dimostrare che due qualsiasi intervalli chiusi non degeneri sono omeomorfi.

ESERCIZIO 2 Date due applicazioni $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$, dimostrare che:

(a) Se f e g sono continue, allora $F : X \times X' \to Y \times Y'$, $F(x, y) = (f(x), g(x))$ è continua;
(b) Se f e g sono aperte, allora F è aperta;
(c) Se f e g sono omeomorfismi, allora F è un omeomorfismo.

ESERCIZIO 3 Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Sia $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$ il grafico di f. Dimostrare che $G(f) \cong X$.

ESERCIZIO 4 Sia $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ uno spazio topologico, dove gli A_i sono sottoinsiemi di A. Sia $f : X \to Y$ (con Y spazio topologico) un'applicazione tale che $f|_{A_i}$ è continua $\forall i \in I$.
Mostrare che:

(a) Se gli A_i sono chiusi e in numero finito allora f è continua;
(b) Se gli A_i sono aperti allora f è continua.

ESERCIZIO 5 Si consideri su $[0, 1]$ la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $\{x, y\} \in \{0, 1\}$. Si dimostri che $[0, 1]/\sim \simeq S^1$, dove $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

ESERCIZIO 6 Dimostrare che $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ è omeomorfo a $S^n \times \mathbb{R}$.
Suggerimento. Usare $f : S^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ definita da $f(x, t) = e^t x$.

ESERCIZIO 7 Siano X' e X'' due spazi topologici metrizzabili con distanze d' e d'' rispettivamente. Dimostrare che il prodotto topologico $X' \times X''$ è metrizzabile.
Suggerimento. Dimostrare che

$$d((x', x''), d(y', y'')) = \max\{d'(x', y'), d''(x'', y'')\}$$

è una distanza su $X' \times X''$ che induce la topologia prodotto.