Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Tutorato IV

Docente: Prof. Margarida Melo
Tutori: Davide Ciaccia, Matteo Bruno

Esercizio 1 Sia X uno spazio topologico T_1 e N_1, e sia $\{x_n\}$ una successione in X che ammette un punto di accumulazione. Dimostrare che $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione che converge in X.

Esercizio 2 Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio topologico X è uno spazio T_1 se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di X.

Esercizio 3 Sia X uno spazio normale e S un sottoinsieme chiuso. Dimostrare che lo spazio quoziente ottenuto da X identificando S a un punto è normale.

Esercizio 4 Sia E un sottoinsieme di uno spazio T_1 e p un suo punto di accumulazione. Dimostrare che ogni intorno di p contiene infiniti punti di E.

Esercizio 5 Sia X uno spazio topologico N_2. Dimostrare che X e uno spazio di Lindelöf.

Esercizio 6 Sia X uno spazio topologico di Lindelöf.

(a) Sia C un sottoinsieme chiuso di X. Dimostrare che C è di Lindelöf. Cosa si puo dire se C non è chiuso?
(b) Sia Y uno spazio topologico, e sia $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva. Dimostrare che Y è di Lindelöf.

Esercizio 7 Sia $\mathbf{K}$ la retta reale, munita della topologia di Sorgenfrey. Dimostrare che K è uno spazio di Lindelöf.

Esercizio 8 Stabilire se un sottoinsieme compatto di uno spazio non di Hausdorff è chiuso.

Esercizio 9 Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Dimostrare che dati due sottoinsiemi compatti K_1 e K_2 di X, si possono trovare due aperti disgiunti A_1 e A_2 tali che $K_1 \subset A_1$ e $K_2 \subset A_2$.

Esercizio 10 Sia X uno spazio topologico, e sia G un gruppo topologico. Un'azione di G su X è una funzione continua $\alpha : G \times X \to X$ tale che, ponendo $g \cdot x := \alpha(g, x)$, si ha:

(i) $e \cdot x = x$ per ogni $x \in X$;
(ii) $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$ per ogni $g_1, g_2 \in G$ e per ogni $x \in X$.

Poniamo $x = g \sim x$ per ogni $x \in X$ e per ogni $g \in G$, e denotiamo con ${}^{X}\!/_{G}$ lo spazio quoziente, detto spazio delle orbite dell'azione α.

Dimostrare che se X è di Hausdorff, regolare, normale, localmente compatto o N_2 allora lo è anche ${}^{X}\!/_{G}$.