

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017
GE220 - Geometria 3 - Tutorato V

DOCENTE: PROF. MARGARIDA MELO
TUTORI: DAVIDE CIACCIA, MATTEO BRUNO

Esercizio 1 Dimostrare che una funzione continua da un compatto a un Hausdorff è chiusa.

Esercizio 2 Sia K la retta di Sorgenfrey.

- (a) Trovare il derivato dell'insieme $\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
- (b) Dimostrare che l'insieme $X = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ non è compatto in K .
- (c) Dire se $X^- = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ è compatto.

Esercizio 3 Sia X uno spazio topologico e Y un suo sottoinsieme. Dire se vale l'uguaglianza $\text{Int}(Y) = X \setminus \overline{X \setminus Y}$.

Esercizio 4 Si consideri \mathbb{R} con la seguente famiglia di insiemi $\mathcal{S}_- = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

- (a) Si dimostri che \mathcal{S}_- è una topologia su \mathbb{R} .
- (b) Detta \mathcal{C} la topologia cofinita e \mathcal{E} la euclidea, si dica se le seguenti funzioni sono continue e/o aperte:

$$\begin{aligned} id : (\mathbb{R}, \mathcal{E}) &\rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{S}_-) & x &\mapsto x \\ id : (\mathbb{R}, \mathcal{C}) &\rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{E}) & x &\mapsto x \\ id : (\mathbb{R}, \mathcal{S}_-) &\rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{C}) & x &\mapsto x \end{aligned}$$

Si dica quindi sotto quali condizioni l'identità tra lo stesso spazio dotato di diverse topologie sia aperta e/o continua.

Esercizio 5 Sia K la retta di Sorgenfrey e sia $D = \{0, 1\}$, dotato della topologia discreta. Si dica se la seguente funzione è continua, aperta, chiusa:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 6 Sia $Y = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Si consideri la seguente topologia su \mathbb{R} :

$$\mathcal{T} := \mathcal{P}(Y) \cup \{Z \subseteq \mathbb{R} : \{0, 1\} \cap Z \neq \emptyset \wedge |Y \setminus Z| < \infty\}$$

Detto $X = (\mathbb{R}, \mathcal{T})$, si risponda alle seguenti domande:

- (a) X è T_1 ?
- (b) X è di Hausdorff?
- (c) X è compatto?