Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Tutorato VII

DOCENTE: PROF. MARGARIDA MELO

TUTORI: DAVIDE CIACCIA, MATTEO BRUNO

ESERCIZIO 1 Dimostrare che la compattezza locale, la paracompattezza e la compattezza per successioni sono proprietà topologiche.

ESERCIZIO 2 Dimostrare che uno spazio metrico completo è separabile.

ESERCIZIO 3 Sia X uno spazio topologico metrizzabile, e sia $Y \in X$. Dimostrare che Y è compatto se e solo se è chiuso e compatto per successioni.

ESERCIZIO 4 Sia X uno spazio metrico completo, privo di punti isolati. Dimostrare che X non è numerabile.

ESERCIZIO 5 Sia X uno spazio metrico. Dimostrare che X è paracompatto. Dedurre che $\mathbb{Q}$ è paracompatto.

ESERCIZIO 6 Sia X uno spazio topologico compatto e di Hausdorff. Dimostrare che X è normale.

ESERCIZIO 7 Mostrare che la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{Z}^+$ è omeomorfa all'insieme $\{0\} \cup \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$

ESERCIZIO 8 Sia G un gruppo topologico localmente compatto. Mostrare che se H è un sottogruppo di G, allora G/H è localmente compatto.

ESERCIZIO 9 Siano X un insieme e (Y, d) uno spazio metrico. Nell'insieme Y^X delle applicazioni di X in Y, definiamo

$$\delta(f, g) := \sup_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\}$$

(a) Dimostrare che δ è una distanza, detta *distanza del sup* o *distanza della convergenza uniforme.* La topologia definita da δ su Y^X si chiama *topologia della convergenza uniforme.*

(b) Supponendo che (Y, d) sia completo, dimostrare che (Y^X, δ) è completo.

(c) Se X è uno spazio topologico, possiamo considerare in Y^X il sottoinsieme

$$\mathcal{C}(X, y) := \{f : X \to Y \, : \, f \text{ è continua}\}$$

Provare che $\mathcal{C}(X, Y)$ è chiuso in Y^X rispetto alla topologia della convergenza uniforme.

(d) Utilizzando (c), dedurre che se Y è completo anche $\mathcal{C}(X, Y)$ è completo.

ESERCIZIO 10 Sia l_2 l'insieme costituito dalle successioni $\{x_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ di numeri reali tali che la serie $\sum\limits_n x_n^2$ sia convergente, cioè tali che $\sum\limits_n x_n^2 < \infty$. Si dimostri che ponendo

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sqrt{\sum_n (x_n - y_n)^2}$$

si definisce in l_2 una struttura di spazio metrico. Si dimostri che la sfera unitaria $\mathbf{S}_1(\mathbf{0}) \subset l_2$ di centro la successione $\mathbf{0}$ a valori costanti uguali a 0, con la metrica indotta da l_2, è uno spazio metrico limitato ma non totalmente limitato.
Suggerimento: gli infiniti punti $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0, ...\}, \mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0, ...\}, ...$ hanno tra loro distanza $\sqrt{2}$.