Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Tutorato VIII

DOCENTE: PROF. MARGARIDA MELO
TUTORI: DAVIDE CIACCIA, MATTEO BRUNO

ESERCIZIO 1 Sia C_n la circonferenza di centro l'origine e raggio $\frac{1}{n}$ e $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Si dica se:
(a) X è connesso/connesso per archi;
(b) X è compatto;
(c) $X \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\}$ è connesso/connesso per archi e compatto.

ESERCIZIO 2 Sia $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y)(x+y) = 0\}$ un sottoinsieme di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{E})$.
(a) Verificare che E è connesso;
(b) Verificare che $E \setminus (0,0)$ ha 4 componenti connesse;
(c) Dimostrare che E non è omeomorfo alla retta euclidea.

ESERCIZIO 3 Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$X = \{x^2 + y^2 = 1\}$$
$$Y = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

Dopo averli disegnati, dimostrare che non sono omeomorfi.
(*Suggerimento:* procedere come nell'esercizio 2).

ESERCIZIO 4 Dimostrare che l'unione arbitraria di sottoinsiemi connessi per archi di uno spazio topologico aventi un punto in comune è connessa per archi.

ESERCIZIO 5 Uno spazio topologico X si dice *totalmente sconnesso* se per ogni $x \in X$ $\mathcal{C}(x) = \{x\}$. Dimostrare che ogni spazio metrizzabile numerabile è totalmente sconnesso.

ESERCIZIO 6 Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$, detto pettine del topologo:

$$B = (\{0\} \times (0,1]) \cup ((0,1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(\tfrac{1}{n}, y) : \ 0 < y \le 1\right\}\right)$$

(a) Mostrare che è connesso ma non connesso per archi (*Suggerimento:* mostrare che un arco a con $a(0) \in (\{0\} \times (0,1])$ deve avere immagine $a(I) \subset (\{0\} \times (0,1])$).
(b) Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso in un punto* $x \in X$ se ogni intorno di x contiene un intorno connesso di x, e si dice *localmente connesso* se è localmente connesso in ogni suo punto. Dire se B è localmente connesso e, se no, dire in quali punti non lo è.

ESERCIZIO 7 Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ è connesso per archi per $n > 1$ (Cominciare con il caso $n = 2$).