Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Tutorato IX

Docente: Prof. Margarida Melo

Tutori: Davide Ciaccia, Matteo Bruno

Esercizio 0 Sia X uno spazio topologico e $x, y \in X$. Dimostrare che le due applicazioni costanti c_x, c_y sono omotope se e solo se x e y appartengono alla stessa componente connessa per archi di X.

Esercizio 1 Siano X,Y e Z spazi topologici e siano date quattro applicazioni continue $f_0, f_1 : X \to Y$, $g_0, g_1 : Y \to Z$. Mostrare che se f_0 è omotopa a f_1 e g_0 è omotopa a g_1 allora $g_0 \circ f_0$ è omotopa a $g_1 \circ f_1$.

Esercizio 2 Sia $Y \subset \mathbb{R}^2$ un sottospazio convesso. Mostrare che, per qualsiasi spazio topologico X, due qualsiasi applicazioni continue $f, g : X \to Y$ sono omotope.

Esercizio 3 Siano $f, g : S^n \longrightarrow S^n$ due mappe continue tali che $f(x) \neq -g(x) \; \forall x \in S^n$. Dimostrare che sono omotope.

Esercizio 4 Dimostrare che $\mathbb{R}$ e $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 5 Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che se x_0, $x_1 \in X$ appartengono alla stessa componente connessa per archi, l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ [f] &\mapsto [\alpha^0 \star f \star \alpha] \end{aligned}$$

(dove denotiamo con $\alpha^0(t) = \alpha(1 - t)$) è indipendente dall'arco $\alpha : I \to X$ di estremi x_0 e x_1 se e solo se $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 6 Dimostrare che l'equivalenza omotopica tra spazi topologici è una relazione d'equivalenza.