TFA - geometria - teoria dei grafi
Francesca Merola
`merola@mat.uniroma3.it`

Proposte

1. Minimo albero ricoprente, algoritmo di Kruskal e di Prim
   1-2 persone, livello scuola superiore (avanzato) o primi anni di università, buono per qualcuno a cui interessino gli aspetti computazionali

2. Grafi hamiltoniani . problema del commesso viaggiatore
   1-2 persone, livello primi anni di università, buono per qualcuno a cui interessino gli aspetti computazionali

3. Approfondimenti sulle colorazioni di grafi
   1-2 persone, livello primi anni di università

4. Reti, grafi aleatori e "aspetti sociali" della connessione
   3-4 persone, livello da stabilire ma circa primi anni di università, uno schema di presentazione porebbe essere
   `http://www.learner.org/courses/mathilluminated/units/11/`

5. Principio di Inclusione-Esclusione
   1-2 persone, livello scuola superiore (avanzato) o primi anni di università

6. Grafi e reti di flusso - teorema Max Flow - Min Cut
   1-2 persone, livello scuola superiore (avanzato) o primi anni di università, buono per qualcuno a cui interessino gli aspetti computazionali

7. Il teorema dei quattro colori
   1-2 persone, livello scuola superiore

Esercizi

1. Disegnare il grafo che ha come insieme dei vertici i numeri $2, 3, \dots 10$, in cui due vertici sono adiacenti se sono coprimi.

2. La stringa $1, 1, 2, 2, 2, 3$ può essere la successione dei gradi dei vertici di un grafo? E di un albero?

3. Sia $\delta(G)$ il minimo fra i gradi degli n vertici di G. Mostrare che se $\delta(G) \geq (n-1)/2$, alora G è connesso.

4. Un grafo $G = (V, E)$ si dice *bipartito* se c'è una partizione dell'insieme dei suoi vertici $V = V_1 \cup V_2$ tale che i sottografi indotti su V_1 e su V_2 sono grafi nulli (gli eventuali spigoli del grafo congiungono vertici di V_1 a vertici di V_2). Provare che un grafo è bipartito se e solo se non ha circuiti di lunghezza dispari (lunghezza = numero di spigoli).

5. Provare che se G è un grafo con almeno due vertici, allora ci sono in G almeno due vertici con lo stesso grado.

6. Provare che se G è un grafo e se d è il massimo fra i gradi dei vertici di G, allora G può essere colorato con $d+1$ colori.

7. La matrice di adiacenza di un grafo $G = (V, E)$, con $V = \{x_1, \dots x_n\}$ è una matrice binaria simmetrica $n \times n$ tale che l'elemento di posto (i, j) è uno se $\{x_i, x_j\} \in E$, zero altrimenti. Sia A la matrice di adiacenza di un grafo G:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Dire se G è regolare guardando solo la matrice di adiacenza A. Disegnare G. Trovare il numero cromatico di G.

8. Una *foresta* è un grafo senza circuiti (non necessariamente connesso). Provare che, se $F = (V, E)$ è una foresta con c componenti connesse, allora

$$|E| = |V| - c.$$